El caudal de conocimientos que invadirá nuestras vidas en los próximos años será vasto.

Si no sabemos asimilar y explotar esa información seguiremos siendo una nación postergada.

La presente obra tiene por objetivo estimular la investigación y creatividad entre sus lectores para mejorar nuestras actuales condiciones de vida.

Aquellas personas interesadas en obtener mayor información, dirigirse a:

Av. Arica 178 San Miguel
Lima - Perú
Telf.: (01) 263-6517

Miguel Guzmán Delgado
Junio de 1999

SERVICIOS GRÁFICOS EN GENERAL
FERNANDO REY E.I.R.L.
LOS MOCHICAS 265 ATE-VITARTE
TELF.: 916-5829

INVESTIGACION MATEMATICA II

CONTIENE TEMAS DE :
ARITMETICA
TRIGONOMETRIA
FISICA
PROGRAMACION
HISTORIA

MIGUEL GUZMAN DELGADO

INVESTIGACION MATEMATICA II

Contiene temas de :

ARITMETICA, TRIGONOMETRIA, FISICA, PROGRAMACION, HISTORIA

Miguel Guzmán Delgado

Impreso en Perú
PRIMERA EDICION JUNIO DE 1999

IMPRESO EN
SERVICIOS GRAFICOS EN GENERAL FERNANDO REY E.I.R.L.
Los Mochicas # 265 Ate - Vitarte
DERECHOS RESERVADOS
RUC 20623420

COMPOSICION, DIAGRAMACION Y MONTAJE
SERVICIOS GRAFICOS EN GENERAL FERNANDO REY E.I.R.L.

Impreso en los Talleres Gráficos de
Servicios Gráficos Generales Fernando Rey E.I.R.L
RUC 20623420

Este libro está dedicado a todas

aquellas personas que quieren

que las cosas sean diferentes

y mejores

PROLOGO

En 1998, 100 becas del CONCYTEC a diversos países del mundo se perdieron por desconocimiento, o por que los postulantes no cumplían con los requisitos para disfrutar de este beneficio.

En este libro publico otros descubrimientos y hallazgos logrados en estos 19 años de investigador matemático, que espero sirvan para estimular el estudio y la creatividad entre los lectores de esta obra, para en el futuro contar con profesionales y técnicos con mayor capacidad para resolver los problemas que tendremos que enfrentar en los vertiginosos cambios, que en todos los campos del conocimiento humano vendrán en los próximos años, y de esta forma poder mantener una posición de fuerza en nuestros términos de intercambio con otras naciones, mejorando el nivel de vida de nuestros ciudadanos.

En algunos capítulos escribo como llegue a las conclusiones expuestas, como en el número V, donde los esfuerzos de esta aventura intelectual de 19 años , con subidas y bajadas, se suman para dar por resultado un método de división no convencional, y así el lector tenga un modelo para continuar con este trabajo enriqueciendo estos estudios o en otros temas que sean de interés para el país como por ejemplo: ¿Como mejorar la producción agrícola? ¿Como mejorar la explotación de nuestros abundantes recursos naturales? ¿Qué se debe hacer para generar nuevas fuentes de empleo para el gran número de desocupados? ¿Cuál debe ser el modelo económico para lograr un desarrollo sostenido? ¿ Qué se deberá enseñar en las escuelas y colegios en el futuro que sean de real utilidad a los intereses del país? ¿Que se debe hacer para mejorar las relaciones familiares?; en lo posible es recomendable que antes de leer cada capítulo el lector trate de llegar por sus propios medios a las conclusiones del autor.

Quiero agradecer a todas aquellas personas que leyeron **«INVESTIGACION MATEMATICA»** y que con sus comentarios positivos me estimularon a publicar este libro mejorando su presentación, muy especialmente al Profesor Juan Guizado Estrada, al Sr. Anibal Paredes de Editorial San Marcos y a las empresas auspiciadoras que me apoyan en hacer realidad este libro, que espero sirva para abrir otras puertas al conocimiento.

Mi reconocimiento a mi amigo de tantos años, Ing. Fernando Rey que ha financiado la publicación de este libro en su imprenta, brindándome sus equipos e instalaciones para lograr una mejor diagramación y presentación de esta obra.

Espero que este trabajo sea del agrado del lector, despidiéndome hasta una nueva oportunidad.

MIGUEL GUZMAN DELGADO
Junio de 1999

INDICE

CAPITULO I

EL ALGORITMO DE EUCLIDES Y LA SERIE DE FIBONACCI

Tratando de encontrar un desarrollo notable en los términos usados para determinar el M.C.D. de dos números mediante el algoritmo de Euclides (*) y realizando múltiples « experimentos » encontré lo siguiente :

	2
2k	k
0	

Por las reglas de este algoritmo, lo anterior se originaba de :

	....	2
.....	2k	k
k	0	

En los espacios con puntos suspensivos haciendo diversas pruebas encontramos que el cociente es 1, al reemplazar en sentido inverso comprobamos que el nuevo dividendo es 3k, completando :

	.....	1	2
.....	3k	2k	k
.....	k	0	

Esta expresión se originó de :

	.....	1	2
.....	3k	2k	k
2k	k	0	

Al seguir haciendo las «pruebas», tratando de que tomen una forma notable los términos, encontré que los espacios del cociente se completaban con 1 y el del nuevo dividendo con 5k. Llenemos los espacios con estos términos:

	.....	1	1	2
.....	5k	3k	2k	k
....	2k	k	0	

Luego como estamos trabajando, invirtiendo el proceso del algoritmo, el origen de la expresión anterior es :

	.....	1	1	2
.....	5k	3k	2k	k
3k	2k	k	0	

Al observar este ultimo resultado podemos deducir que el espacio del cociente se completará con 1 y el del cociente con 8k.

	.....	1	1	1	2
.....	8k	5k	3k	2k	k
5k	3k	2k	k	0	

De todo lo visto podemos inducir que los cocientes serán cifras 1 y los términos del dividendo serán la suma de los dos anteriores empezando por la derecha.

Generalizando :

.....	1	1	1	.....	1	1	1	1	1	1	2
a_{n+2}	a_{n+1}	a_n	a_{n-1}	.....	21k	13k	8k	5k	3k	2k	k
a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	.....	8k	5k	3k	2k	k	0	

Al analizar los términos del dividendo y residuo observamos que sus coeficientes son los de la serie de ***Fibonacci*** .

SERIE DE FIBONACCI (I)

Una de las series numéricas más asombrosas y que más han incitado la curiosidad del hombre, es la serie infinita y ordenada de enteros llamada serie de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 .....Fn; dada a conocer a principios del siglo XIII, cuando el matemático italiano Leonardo de Pisa, llamado asimismo Fibonacci, propuso un acertijo recreativo cuya solución dio lugar a la serie que hoy ostenta su nombre. El hecho de que se trata de una sucesión numérica bien definida se advierte desde el momento en que todos y cada uno de sus términos, con exclusión de los dos primeros, resultan de sumar los dos que le anteceden.

De allí que cualquier término deseado de la serie puede ser expresado por la fórmula:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

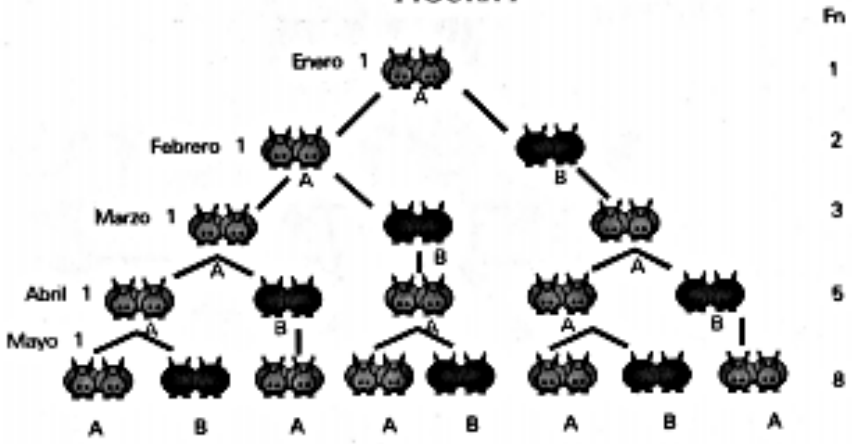
una vez establecidos los dos valores iniciales como :

$$F_1 = 1 \quad y \quad F_2 = 1$$

***Leonardo de Pisa**, quien fuera acaso el matemático más destacado de la edad media, publicó en 1202 un importante trabajo matemático, el **Liber Abaci**. Aunque esta obra tiene el mérito de haber divulgado por toda Europa el uso de los números indoarábigos (* *) en las operaciones aritméticas , se le recuerda más que nada por su presentación del acertijo siguiente : « Un granjero metió en un cercado a una pareja de conejos. ¿ Cuántas parejas habrán nacido allí, al cabo de un año, si al mes cada pareja produce otra, y si los conejos pueden reproducirse a los dos meses de nacidos?»*

Para resolver el problema conviene proceder en forma sistemática (1) Hay una pareja el 1ero. de enero. (2) Esta pareja producirá otra el 1ro. de febrero y así en el primer día de cada uno de los meses subsiguientes. Tracemos un diagrama como el que se muestra en la fig. 1 para ordenar las cuentas. Si A representa una pareja de conejos adultos y B una pareja de recién nacidos, el 1ro. de enero habrá sólo una, A; el 1ro. de febrero tendremos la pareja original A, más la pareja de recién nacidos, B; el 1ro. de marzo tendremos la pareja original A, y la pareja nacida el 1ro. de febrero que ha madurado para convertirse en A (pareja adulta) y los nacidos de la pareja original.

FIGURA I



Si continuamos con el mismo procedimiento hasta el 1ro. de enero del año siguiente el diagrama se habrá completado en la forma que se muestra en el recuadro.

Del número final que aparece en la columna de la extrema derecha en el que se representa a la pareja original como todas las demás nacidas durante el curso del año, vemos que la respuesta al problema de Leonardo es 377 parejas.

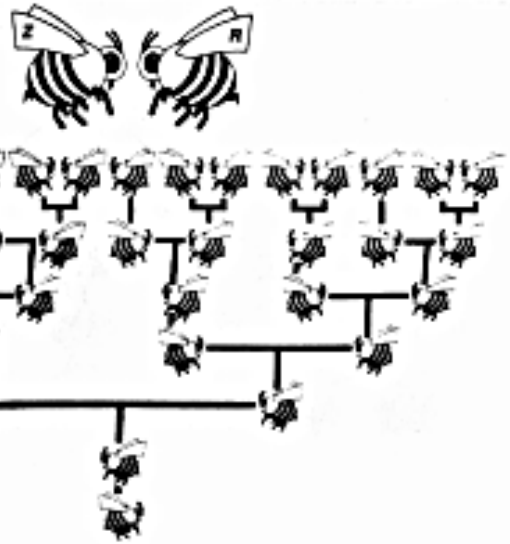
La solución misma carece de importancia frente al interés que han despertado las columnas de números generales en busca de la solución, porque cada fila del mes respectivo estará formada por los términos de la serie de Fibonacci: 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Fn .....

GENEALOGIA DE LOS ZANGANOS

Si bien es cierto que el problema plantedo por Leonardo de Pizza es puramente ficticio, uno de los aspectos más sorprendentes de la serie de Fibonacci es su frecuente manifestación en la naturaleza. Un ejemplo nos lo brinda la genealogía del zángano en la familia de la abeja común (apis mellifera), en la que predomina la hembras.

De hecho todos los huevos fecundados se transforman en hembras que pasan a formar parte del ejército de obreras, o que a base de alimentos y cuidados especiales son transformadas en reinas. El zángano o abeja macho se desarrolla a partir de un huevo no fecundado ; método de reproducción llamado parto-génesis, muy común en las formas inferiores de vida. El zángano, pues, carece de padre.

FIGURA II



Z	R	Z+R
5	8	13
3	5	8
2	3	5
1	2	3
1	1	2
0	1	1
1	0	1

Con base a estos datos, es posible trazar un diagrama en el que se haga remontar el árbol genealógico del zángano a cualquiera de sus pasadas generaciones, tal como se muestra en la figura II. Cada Z representa a un zángano, con un solo progenitor hembra, y cada R a una reina, nacida necesariamente con la participación de ambos progenitores. Conforme elaboramos el diagrama, llevando debida cuenta del números de antepasados, comprobaremos que estos suman invariablemente , ya sea en total o teniendo en cuenta solo a los machos o solo a las hembras, un número de la serie de Fibonacci.

DISTRIBUCION DE SEMILLAS Y NUMERO DE PETALOS

La serie de Fibonacci se presenta una vez más, acaso envuelta en mayor misterio, en la disposición de las semillas de numerosas plantas y en el número de pétalos de algunas flores.Entre las fanerógamas, la familia de las compuestas comprende unos 930 géneros y 20 000 especies distribuidas por el mundo entero. Las cabezuelas del girasol presentan una inflorescencia ordenada conforme a un motivo regular de espirales. Cierta variedad del girasol (Helianthus annus) llega a alcanzar hasta cuatro metros de altura, y sus cabezuelas llegan a medir más de 30 cm de diámetro.

Cuando se producen las semillas, tras haber madurado la inflorescencia, el diseño característico a base de espirales se percibe con toda claridad. El recuento de las mismas es como sigue: 89 espirales de giro muy abierto en sentido de las manecillas del reloj; otras 55, de giro menos abierto en sentido inverso, y 34 más, de giro muy cerrado en el mismo sentido de las primeras. La mayor cabezuela que se haya examinado hasta ahora, contaba con 144, 89 y 55 espirales,en cada uno de los giros respectivos. El hecho significativo en ambos recuentos es que se trata de términos consecutivos de la serie de Fibonacci. En la inflorescencia de ciertas variedades de la margarita suele haber 34 espirales y 21 en otro; es decir, una vez más, términos consecutivos de la serie de Fibonacci. Aunque tales ejemplos no son base suficiente para suponer que se trata de una Ley Absoluta en la naturaleza, su indudable persistencia constituye un hecho curioso.

En las flores compuestas, las estructuras llamadas comúnmente pétalos, que rodean la cabezuela, corresponden en realidad a las flores linguiformes de los bordes, cuyo número corresponderá casi invariablemente al de un térmi-

no de la serie Fibonacci. De allí que un apasionado amante que deshoje una margarita para probar si su amada le corresponde, tendrá que arrancar muy probablemente 21, 34, 55 ú 89 pétalos, antes de obtener la respuesta

SERIE FIBONACCI Y LA DIVINA PROPORCION

En 1753, en el curso de una investigación sobre las propiedades de la serie, Robert Simson, matemático de la Universidad de Glasgow, notó que el valor obtenido de relacionar un término cualquiera de la serie con el inmediato anterior, parecía rondar con insistencia en torno a un número específico.

Conforme se adentraba en la serie para analizar pares de términos, cada vez mayores, ese número específico se iba definiendo con más claridad. Como ejemplo la razón del segundo término F_2 de la serie al primer término F_1 es 1/1, ó simplemente 1; F_3 es a F_2 como 2/1 igual a 2; F_4 es a F_3 como 3 es a 2 ó igual a 1,5; F_5 es a F_4 como 5/3 ó 1,67 aproximadamente; siguiendo este proceso encontramos las siguientes razones : 1,60; luego 1,625; 1,615; 1,619 y así sucesivamente.

La razón de F_{50} a F_{49} es como 1 25862 69025 / 77787 42049 es aproximadamente igual a 1,618. Simson determinó por último que esta sucesión de valores convergía hacia el número irracional $(\sqrt{5} + 1)/2$ que principia en 1,61803 .... Simson reconoció al momento este número, bien conocido ya entre los matemáticos como el número de oro.

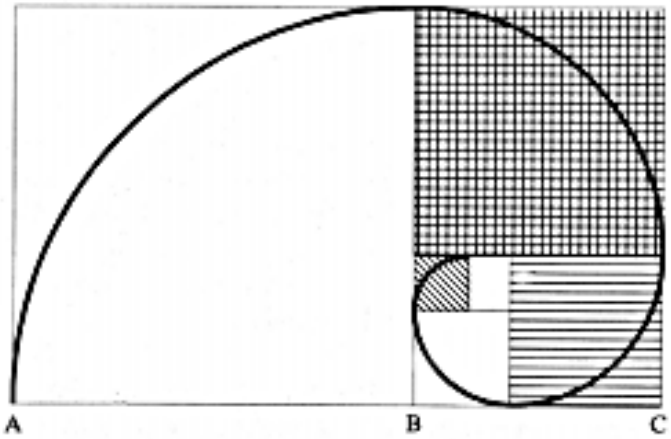
Muchos años antes, Kepler había escrito que, en su opinión, el número de oro simbolizaba la intención del Hacedor Supremo de «crear semejante de lo semejante», y la historia de la profunda influencia ejercida por este número en la creatividad humana se remontaba a muchos siglos atrás, por lo menos hasta los constructores de la antigua Atenas.

Acaso más que ninguna otra cultura , la de Grecia clásica buscó en la ciencia, el arte, la arquitectura y demás esferas de la actividad humana, principios universales de perfección y belleza.

Aún en actividades tan elementales como la división de segmentos en partes cada vez más pequeñas subyacía el concepto filosófico de la perfecta proporción.

Tal vez lo que empezó como un inexplicable «sentido de proporción» estética, cristalizó con el tiempo en un enunciado práctico : La parte menor es a la mayor, lo que la mayor es al conjunto. Llamado, por autores ulteriores, divina proporción, el concepto no tardó en incorporarse a las matemáticas de la geometría.

La aplicación básica de la divina proporción fue utilizada por los griegos desde el siglo V. a. de C. aproximadamente, y hoy se le conoce por sección áurea. Tomemos por ejemplo el segmento AB, al que se divide en dos partes desiguales en el punto C, como se indica en la Figura III :



Para descubrir la sección áurea del segmento AB es preciso ubicar el punto C en conformidad con la divina proporción, de suerte que la razón de la parte mayor AC, sea a la menor CB como AB es a AC.

En el siglo XV, el matemático Lucas Pacioli derivó de la sección áurea la ecuación de segundo grado $x^2 - x - 1 = 0$, cuya raíz positiva definió el valor de esta razón con toda precisión. Se trataba del mismo valor que Robert Simson, tres siglos más tarde redescubriría inopinadamente en la razón de términos sucesivos de la serie de Fibonacci :

$$(\sqrt{5} + 1)/2$$

¡el número de oro!.

Desde su descubrimiento, la divina proporción ha dado lugar a otras proporciones llamadas asimismo perfectas. Es posible, por ejemplo, construir un rectángulo de oro en coincidencia con la sección áurea (veáse la figura III).

Si cortamos un cuadrado en el rectángulo de oro, el rectángulo restante poseerá las mismas áureas proporciones que aquel del cual se derivó, lo que significa que éste será a su vez un rectángulo de oro. Tales proporciones se constituyeron en un canon puntualmente respetado por la arquitectura y arte clásicos.

Las proporciones de los principales monumentos de la antiguedad, incluso

las del Partenón de Atenas, se ajustan rigurosamente a los canones de la sección áurea y del rectángulo de oro.

Numerosos artistas del renacimiento, interesados por las fuentes clásicas de inspiración, tanto por lo que toca a la temática como a la técnica, ajustaron también sus composiciones a los canones de la divina proporción.

En la llamada divina proporción, la serie de Fibonacci surge una vez más en la naturaleza. En el caso de un rectángulo como el que se muestra en la figura III, es posible inscribir un número infinito de rectángulos de oro, cada vez más pequeños, y si en cada uno de los cuadrados así obtenidos se inscribe un arco de circuferencia, con radio igual en cada caso a un lado del cuadrado respectivo, y que empalme con los arcos inmediatos, la espiral resultante se aproxima a la espiral logarítmica.
Forma estética admirada a su vez en múltiples y variadas culturas, que aparece reiteradamente en conchas de caracol, cuerpos de animales y, como ya apuntamos antes, en las cabezuelas de algunas compuestas y en las piñas.

Las artes visuales como la pintura, la escultura y la arquitectura, y otras formas relacionadas con lo que es grato a la mirada , tiene su equivalente auditivo en la composición musical, y si las artes plásticas se manifiestan a través de la división armónica de planos y volúmenes, la música logra objetivos similares a través de la división del tiempo, con sucesiones de notas y silencios de duración variable. No es pues de sorprender que los motivos susceptibles de ser expresados matemáticamente en términos de relaciones de Fibonacci hayan sido descubiertos en las obras de compositores como Palestrina, Bach, Beethoven y Bartok. Incluso algunas obras del siglo XX fueron deliberadamente estructuradas con apego a estas proporciones, como la llamada Móvil Fibonacci, del Compositor norteamericano de origen austriaco, Ernst Krenek.

Las abejas, las cabezuelas del girasol, los zánganos, el Partenón y la serie de Fibonacci : ¿Qué hilo puede ensartar elementos tan disímbolos? ¿Serán estos acaso como los términos en la sucesión de números primos, en que cada uno ostenta una característica común a toda la serie, pero que rehusán terminantemente a verse unificados en una fórmula que los abarque a todos ellos? ¿O será más bien como una progresión aritmética, cada uno relacio-

nado con un concepto básico y separado únicamente por alguna diferencia explicable en su esencia?.
Muchos frentes de investigación se muestran prometedores, pero hasta el momento no se avizora solución alguna.

(*) Euclides fue un matemático griego (306 - 283 A.C.) que escribió la obra de 13 libros llamado «LOS ELEMENTOS» donde recopiló y ordenó los conocimientos matemáticos desarrollados desde la época de Tales de Mileto, Pitagoras, Theudiius de Megnesie, Platón, Aristóteles etc. y los alcanzados por otras culturas como la egipcia que desarrollaron una geometría empírica debido a que se veían en la necesidad de redefinir los límites de los terrenos, que estaban en las riberas del río Nilo cada vez que este se desbordaba y por las construcciones monumentales que realizaron.
Euclides organizó sistemáticamente los conocimientos de su época a partir de un número pequeño de postulados iniciales y de una secuencia de teoremas presentados en el orden de su derivación lógica, con lo que comenzó la construcción del edificio deductivo en el que se sustentan las matemáticas y demás ciencias abstractas actuales.
Son famosos sus postulados sobre geometría plana; el 32 postulado fue durante siglos motivo de estudio y discusiones entre matemáticos profesionales y aficionados; este postulado sostenía que por un punto exterior a una recta pasaba una y solo una recta paralela a la anterior.
La imposibilidad de demostrar este postulado con los anteriores existentes, trajo como consecuencia que matemáticos revolucionarios como Nicolás Lobachevski, Carl Gauss y Riemman entre otros lo negarán, encontrando las geometrías no Euclideanas, causando una verdadera revolución en los conceptos de espacio y tiempo.
Albert Einstein utiliza estos estudios para elaborar su teoría general de la relatividad.
El lector que se familiarice hoy con los «ELEMENTOS» encontrará en ellos muchas de las nociones expuestas en los actuales manuales de geometría, en lo que se refiere al contenido y a la forma, incluso hasta en los enunciados de ciertos teoremas.

(**) Los números indoarabigos son los que actualmente usamos y originalmente en el símbolo se podían contar los ángulos que este representaba, por ejemplo en el símbolo del número 7 se podian contar 7 ángulos.

CAPITULO II

RECTANGULO DE REFLEXION

LOS NUMEROS PRIMOS

Cualquier consideración sobre series numéricas sería incompleta si se omitiese el comentario de una de ellas que ha desconcertado y cautivado en su tiempo a los matemáticos, interesados en este tema desde la época de Euclides por lo menos.

Como la serie numérica que se expresa en el acto de contar, la sucesión de numeros primos puede tener tantos términos como uno desee añadir a partir de 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ..... basta un breve análisis para comprobar que no se trata ni de una progresión aritmética ni geométrica, y sin embargo hay una peculiaridad en todos ellos : cada uno de los términos es divisible únicamente por si mismo y por ± 1. Razón por la cual los términos de esta sucesión se denominan números primos

La contribución de los matemáticos griegos al conocimiento de los números primos fue de primera importancia. Euclides ofreció una elegante prueba sobre la existencia de una serie infinita de números primos (*).

Hacia el año 250 A. C., Eratóstenes de Cirene, contemporáneo de Arquímedes, ideó un método eficaz, llamado criba de Eratostenes en su honor,para entresacar a todos los números primos de una serie de enteros, desde el 2 hasta cualquier cifra dada, sin tener que probarlos con divisores.

(Un número entero cualquiera puede descomponerse en el producto de números primos unicamente, este es el Teorema Fundamental de la Aritmética. Los números primos vendrían a desempeñar el papel de los átomos de los elementos de la tabla periodica, pues estos agrupados dan origen a otros números)

Por más que el método cumplía con su cometido, no arrojaba luz alguna para la obtención de una fórmula que expresara un número primo con base en los términos precedentes. Desde entonces, los matemáticos de todas las épocas han tratado en vano de hallar dicha fórmula general.

(*) En el diccionario Enciclopedico Ilustrado Sopena encontramos la definición de primo : Primero. Primoroso, excelente. Arit. Dicese del número entero que solo es exactamente divisible por si mismo y por la unidad. Siguen otras acepciones.

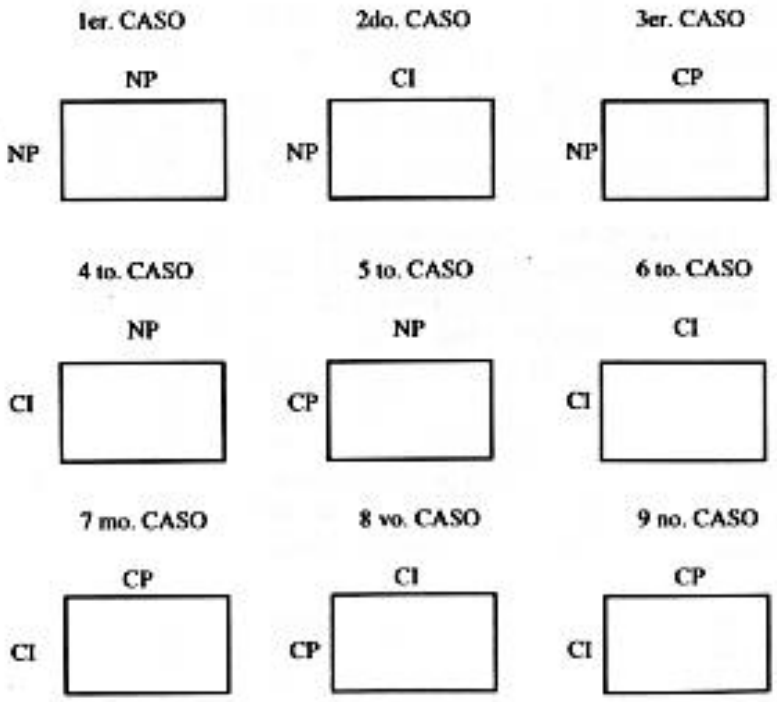
Nosotros estamos sentados
sobre los hombros de gigantes,
por eso es que vemos más lejos

Sir Isaac Newton
(1641 - 1727)

En un rectángulo de largo y ancho variables, tomando como unidad una medida arbitraria se dibujan rectángulos con medidas de números naturales, estos números pueden ser con sus respectivas abreviaturas :

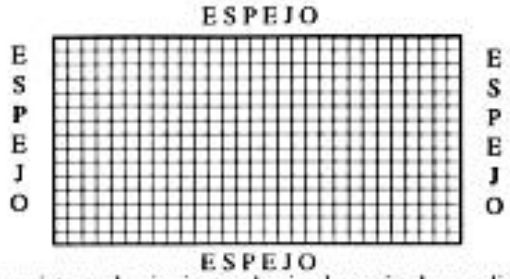
Número primo = NP
Número compuesto impar = CI
Número compuesto par = CP

Se presentan 9 combinaciones que generan 9 tipos de rectángulos que los clasificaremos por el tipo de número de las medidas de sus lados, los cuales presentamos a continuación :



Por las investigaciones realizadas con estos nueve casos de rectángulos mediante «experimentos» con las condiciones siguientes : Imaginemos que cambiamos los lados del rectángulo por espejos de altura h perpendiculares al plano que contiene al rectángulo.
Tomando una unidad de medida para esta exposición de 0,2 cm = 1 unidad para la figura .

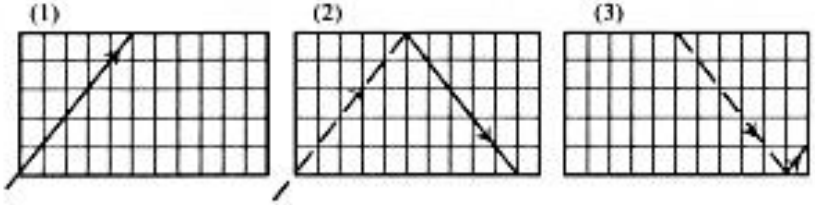
A cada lado del rectángulo le asignamos una medida con el valor de un número natural y señalamos en cada lado de unidad en unidad de tal forma que por cada señal trazamos una paralela al largo y ancho de tal forma que el plano del rectángulo queda dividido en cuadrados cuyo lado mide una unidad, quedándonos una figura con la siguiente estructura :

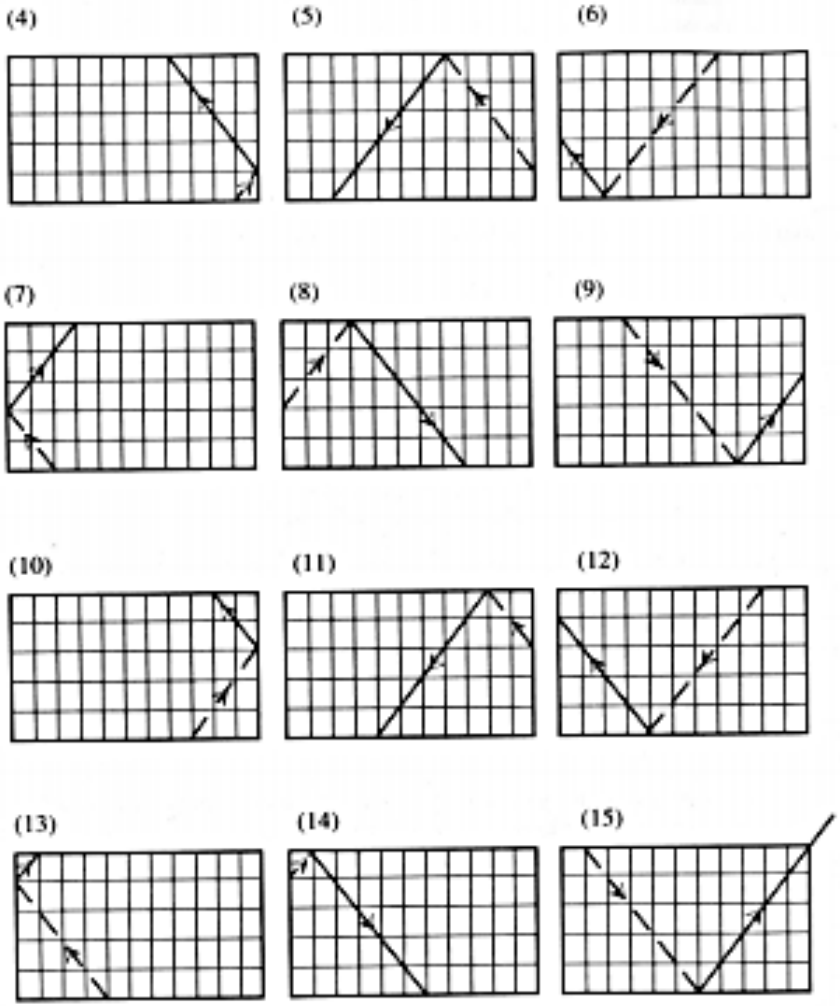


El experimento consiste en lo siguiente : haciendo variar las medidas de los lados de los rectángulos (lo que genera los 9 casos al variar la longitud de los lados) hacemos ingresar por un vértice del rectángulo un rayo de luz que es bisectriz del ángulo de 90º del vértice, manteniendo un plano perpendicular a los espejos que sostenga al rayo de luz en su recorrido por el interior del rectángulo, y teniendo encendida la fuente de luz, lo hacemos reflejar sucesivamente con lo que se llega a importantes observaciones, es importante anotar que el ángulo de incidencia será igual al angulo de reflexión en el vacio, por la ley de Snell es decir 45º.
El rayo ingresara por un vértice y comenzará a reflejarse en las distintas caras, hasta salir del rectángulo lo cual iremos viendo en cada uno de los casos que vamos a analizar.
Este es uno de los trabajos que he realizado tratando de encontrar la fórmula que genere los números primos.

1.- PRIMER CASO : LARGO Y ANCHO DEL RECTANGULO SON NUMEROS PRIMOS

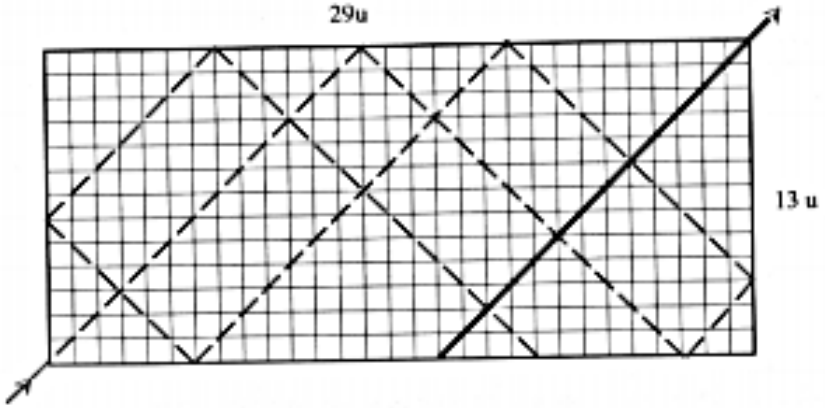
Consideremos un rectángulo de longitudes 11u y 5u, con las condiciones iniciales para todos los experimentos, hagamos ingresar el rayo de luz por un vértice y observemos su movimiento hasta que se retire el rayo de luz del rectángulo :





El rayo de luz se ha reflejado 15 veces antes de salir del rectángulo, todos los cuadrados en que se halla dividido el rectángulo han sido cruzados en una de sus diagonales una sola vez, es decir no existe un cuadrado en que el rayo de luz lo haya cruzado por sus dos diagonales.
Por los otros experimentos realizados, una observación que puede ser importante para este caso es que el rayo de luz sale por el vértice opuesto diagonalmente al que ingresó.
Voy a poner otro ejemplo de este caso para que pueda ser entendido con más claridad :
Si se hace ingresar el rayo de luz por el vértice de un rectángulo cuyos lados miden 29 y 13 unidades (los dos números son primos), se observa el mismo fenómeno que en el caso anterior el rayo de luz cruzará cada cuadrado por su diagonal una sola vez y recorrerá todos

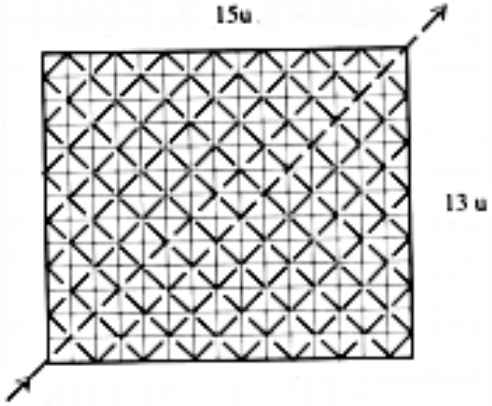
los cuadrados pasando solo una vez por una de sus diagonales y en este primer caso por los experimentos hechos siempre sale por el vértice opuesto diagonalmente al por el que ingresó el rayo de luz.



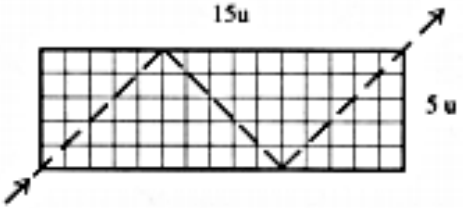
El Lector puede comprobar el paso del rayo de luz.
Este método ayudaría geométricamente a determinar si dos números son primos o no, pero no nos adelantemos y veamos los siguientes casos :

2.- SEGUNDO CASO : EL LARGO ES UN NUMERO COMPUESTO IMPAR Y EL ANCHO ES UN NUMERO PRIMO

Analicemos este segundo caso, asignemos al largo el valor de 15 y al ancho el valor de 13 observando lo que sucede :



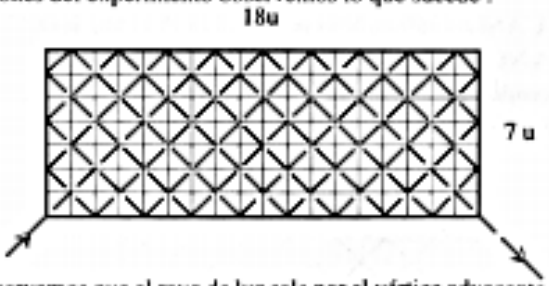
El lector puede comprobar el recorrido siguiente el movimiento del rayo luz.
Se puede diseñar un circuito eléctrico o electrónico que indique el recorrido del rayo de luz que puede ser usado en exposiciones sobre las propiedades de la luz, o tambien como algo estetico haciendo variar los colores de los cuadrados del recorrido del circuito.
El rayo de luz ingresa por el vértice y al reflejarse en los espejos sucesivamente saldrá por el vértice opuesto diagonalmente como en el caso anterior.
Existen otras posibilidades, si el largo es múltiplo del número primo como en el siguiente ejemplo largo = 15u ancho = 5u ,se presenta la siguiente situación :



El rayo de luz no recorre no recorre todos los cuadrados del rectángulo.
De este ejemplo se concluye que uno de los valores de los lados no es número primo.

3.- TERCER CASO : EL LARGO ES UN COMPUESTO PAR Y EL ANCHO ES NUMERO PRIMO

Asignemos valores a los lados del rectángulo : largo 18 y ancho 7
Con las condiciones del experimento observemos lo que sucede :



En este caso observamos que el rayo de luz sale por el vértice adyacente al por el que ingreso el rayo de luz.

TEMA DE INVESTIGACION

Con estos ejemplos el lector tiene suficientes elementos de juicio para experimentar y obtener por él mismo las conclusiones que se obtienen de los siguientes casos.
Lo estudiado en este capítulo puede ser llevado a un lenguaje de programación que simule estos procesos.
Este estudio esta relacionado con las reglas de divisibilidad.
Se debe experimentar con otras figuras geométricas.

CAPITULO III

METODO PARA MULTIPLICAR MEDIANTE UNA COMPUTADORA O CALCULADORA AMPLIANDO SU CAPACIDAD OPERATIVA

El algoritmo de multiplicación que utilizamos en el sistema de base 10 es el siguiente :

			a	b	c	d	e	f	X	.....(A)
						m	n	p		
			ap	bp	cp	dp	ep	fp	+	
		an	bn	cn	dn	en	fn			
	am	bm	cm	dm	em	fm				
S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9		

El proceso de multiplicación lo explicamos a continuación : Cada cifra del multiplicador la multiplicamos por cada cifra del multiplicando empezando por las unidades, cuando el producto de las dos cifras es mayor o igual a 10, la cifra de decenas de dicho producto lo sumamos a la columna del orden inmediato superior y de esta forma obtenemos las cifras de los productos parciales para luego ser sumadas por columnas y obtener el producto.

¿Pero qué sucede cuando la cantidad de cifras del multiplicando o multiplicador rebasa la capacidad de pantalla de nuestra PC, MAC o calculadora con la que estemos trabajando y deseamos conocer el resultado exacto del producto ?

En este capítulo presentó una solución a este problema.

Supongamos que estamos trabajando con una PC, MAC o calculadora cuya capacidad de pantalla es de 10 dígitos, entonces las cifras de nuestra expresión (A) crecerán a 5 cifras y a partir de ahora, para un mejor entendimiento de esta idea las llamaremos ***nuevas unidades***, se toma la mitad de capacidad de pantalla para aprovechar el máximo producto exacto que puede aparecer en la pantalla, por un conocido teorema (...si tenemos dos números uno de 5 caracteres y otro de 7 caracteres, su producto tendrá como máximo 13 cifras ó 12 es decir la suma de caracteres o la suma más uno.....), que nos permite saber cuantas cifras tendrá el producto de dos o más números.

Si tenemos una pantalla cuya capacidad es de 14 dígitos entonces las cifras de nuestra expresión (A) crecerán a 7 dígitos.

Volviendo a la pantalla de 10 dígitos, las cifras de la expresión en las nuevas unidades serán en el multiplicando :

$a = \overline{a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5}$ $\quad b = \overline{b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5}$ $\quad c = \overline{c_1\, c_2\, c_3\, c_4\, c_5}$

$d = \overline{d_1\, d_2\, d_3\, d_4\, d_5}$ $\quad e = \overline{e_1\, e_2\, e_3\, e_4\, e_5}$ $\quad f = \overline{f_1\, f_2\, f_3\, f_4\, f_5}$

En el multiplicador :

$m = \overline{m_1\, m_2\, m_3\, m_4\, m_5}$ $\quad n = \overline{n_1\, n_2\, n_3\, n_4\, n_5}$ $\quad p = \overline{p_1\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5}$

Vamos a realizar la siguiente multiplicación para entender el método :

```
4355 87564 98761 66782 97863  X
           54600 54635 11437
```

Entonces cambiamos las nuevas unidades por sus símbolos tomando como base la expresión (A) :

$$a = 04355 \quad b = 87564 \quad c = 98761 \quad d = 66782 \quad e = 97863$$

$$m = 54600 \quad n = 54635 \quad p = 11437$$

Haciendo esto, la multiplicación se transforma en :

		a	b	c	d	e	X	.....(B)
				m	n	p		
		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5		
	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5			
M_1	M_2	M_3	M_4	M_5				
S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7		

En la expresión (B) se han originado los productos parciales P_i , N_j , M_k debiendo tener de longitud 5 caracteres donde i, j, k $\in$ N i = 1, 2,...,5 j = 1, 2,...,5 k = 1, 2,....,5

La suma por columnas lo representamos por S_r donde r = 1, 2, ... 7 y S_r debe tener de longitud 5 caracteres donde cada S_r son equivalentes a lo siguiente :

$S_1 = M_1 + R_2$
$S_2 = M_2 + N_1 + R_3$
$S3 = M_3 + N_2 + P_1 + R_4$

$S_4 = M_4 + N_3 + P_2 + R_5$
$S_5 = M_5 + N_4 + P_3 + R_6$
$S_6 = N_5 + P_4 + R_7$
$S_7 = P'_5 + R_7$ Donde $P_5 = P'_5 + R_7$

Los R_t donde t $\in$ N y t = 2,3,.....7, son las ***nuevas decenas*** que llevamos a la columna del orden inmediato superior.

S_r tiene una longitud de cinco caracteres contadas de derecha a izquierda para este análisis y los R_t son los caracteres de exceso que sobrepasen la longitud de cinco caracteres y que se sumarán a la columna del nuevo orden inmediato superior.
Hallemos los productos parciales P_i, N_j, M_k :

P_5 = ep = 97863 x 11437 = 11192 59131
P'_5 = 59131 $\quad R_7$ = 11192 x 10^5
P_4 = dp = 66782 x 11437 = 07637 85734
P_3 = cp = 98761 x 11437 = 11295 29557
P_2 = bp = 87564 x 11437 = 10014 69468
P_1 = ap = 04355 x 11437 = 00498 08135

Hallando los N_j:

N_5 = en = 97863 x 54635 = 53467 45005
N_4 = dn = 66782 x 54635 = 36486 34570
N_3 = cn = 98761 x 54635 = 53958 07235
N_2 = bn = 87564 x 54635 = 47840 59140
N_1 = an = 04355 x 54635 = 02379 35425

Hallando los Mk :

M_5 = em = 97863 x 54600 = 53433 19800
M_4 = dm = 66782 x 54600 = 36462 97200
M_3 = cm = 98761 x 54600 = 53923 50600
M_2 = bm = 87564 x 54600 = 47809 94400
M_1 = am = 04355 x 54600 = 02377 83000

Con estos resultados hallamos los S_r :

```
S6 =   5 3 4 6 7   4 5 0 0 5   +
       0 7 6 3 7   8 5 7 3 4
                   1 1 1 9 2
       ---------------------
       6 1 1 0 5   4 1 9 3 1
```

Por ser Sr de cinco caracteres tenemos:
S_6 = 41931 y $\mathbf{R_6 = 61105}$

S5 =	53433	19800	+	S_5 = 45032 y **R_5 = 1 01215**
	36486	34570		
	11295	29557		
		61105		
	101215	45032		
S4 =	36462	97200	+	S4 = 75118 y **R4 = 1 00436**
	53958	07235		
	10014	69468		
	1	01215		
	100436	75118		
S_3 =	53923	50600	+	S_3 = 18311 y **R_3 = 1 02263**
	47840	59140		
	498	08135		
	1	00436		
	102263	18311		
S_2 =	47809	94400	+	S_2 = 32088 y **R_2 = 50190**
	2379	35425		
	1	02263		
	50190	32088		
S_1 =	2377	83000	+	S_1 = 2378 33190
		50190		
	2378	33190		

Agrupando los S_i para formar el producto :

```
                    435587564987616678297863      X
                                  546005463511437
 ------------------------------------------------------------
 2378331903208818311751184503241931591 31
    S1        S2     S3     S4     S5     S6     S7
```

El resultado es : **2378 33190 32088 18311 75118 45032 41931 59131**

HISTORIA SOBRE EL ORIGEN DEL JUEGO DE AJEDREZ

El texto siguiente es una versión adaptada por el autor, del texto correspondiente del libro EL HOMBRE QUE CALCULABA

Existió en épocas muy remotas un Rey de nombre Iadava, monarca de la provincia de Taligana en la India.
La tranquilidad de la placentera vida cortesana se vio ensombrecida por una violenta guerra desatada por Varangul príncipe de Calian. El Rey Iadava era un hábil estratega militar y logró elaborar una detallada estrategia para vencer a su enemigo que había traido muchas tribulaciones y pesares a los súbditos de su reino. Su plan resultó tan exitoso que venció a su enemigo infringiéndole una gran derrota, expulsándolo para siempre y logrando definir los límites de su reino para la paz y progreso de sus súbditos.
Pero esta victoria tuvo un costo muy alto pues entre los muertos estaba su hijo el príncipe Adjamir, que fue muerto por una flecha que lo mató instantáneamente. Esto sumió en una gran tristeza al rey Iadava que se recluyó en su habitación y solo atendía a sus consejeros cuando los asuntos de estado eran de suma urgencia. Su estado se agravó tanto, que pasaba los días reviviendo lo sucedido en esta batalla trazando líneas en una caja de arena, que representaban las maniobras donde perdió la vida su hijo. Los brahmanes pedian a la diosa Dhanuotara, patrona de los enfermos, que devolviera la razón a su querido monarca pero nada sucedía.

Hasta que un día se le informó al rey que había llegado un joven bracmán con aspecto de miserable, que solicitaba audiencia; el rey accedió a recibirlo ante la insistencia del joven que llevaba varios días esperando ser escuchado.
Ante la presencia del rey sus visires ,bracmanes y miembros de la corte se le preguntó quien era, de donde venía y que deseaba del poderoso monarca.
Mi nombre es Lahur Sessa - respondió - y vengo de la aldea de Manir, ahí tuve noticias de las tribulaciones de nuestro generoso monarca por la perdida de su hijo, así que pensé en inventar un juego que pudiera distraerlo y abriera las puertas de su corazón a nuevas alegrías.
Ante esta respuesta que despertó la curiosidad del Rey, este pidió ver su invención con un gesto de desgana.
Lahur Sessa extrajo un tablero cuadrado dividido en sesenta y cuatro cua-

drados iguales pintados alternadamente en dos colores, en este tablero se colocaban dos colecciones de piezas que repetían simétricamente los motivos, se distinguían por ser una de ellas de color blanco y la otra colección de color negro, era para dos jugadores, cada uno dispone de ocho piezas pequeñitas, llamadas peones y representan a la infantería que avanzan sobre el enemigo para dispersarlo secundado por los elefantes (hoy en día torres), la caballería indispensable para cualquier combate está simbolizada por dos piezas que pueden saltar como dos corceles por encima de las otras, los guerreros nobles y de prestigio están incluidos por los dos visires (alfiles) del Rey. La Reina representa el espiritú patriótico del pueblo y está dotada de amplios movimientos, esta simpática colección termina con una pieza que aislada poco vale pero que amparada por las otras se vuelve muy fuerte : es el Rey.

El Rey se interesó sobremanera sobre este nuevo juego y no cesaba de preguntar durante las largas horas en que Lahur Sessa lo instruyó a él y a los miembros de la corte sobre las reglas del juego; en un momento el Rey ladava hizo notar con gran sorpresa que la posición de las piezas, resultado de las combinaciones de los lances hechos en una de las tantas partidas que jugaron ese entretenido e histórico día, reproducian la batalla de Dacsina, Lahur Sessa hizo notar que para conseguir la victoria era imprescindible el sacrificio del visir que con tanto empeño había defendido el Rey.

El Rey comprendió que el sacrificio de un principe es a veces impuesto por el destino, para que de el resulten la paz y libertad de un pueblo y que moviendo esas sencillas piezas aprendió que un soberano nada vale, sin el apoyo y dedicación de sus súbditos.

Fue tanta su alegría que se puso feliz de la vida, pues nunca pensó que el ingenio humano pudiera producir maravillas como este juego y dirigiendosé al joven Lahur Sessa le pidió una recompensa por el juego inventado, fruto de su ingenio.

El bracmán que estaba acostumbrado a la vida de sacrificio y austeridad, indicó que ver a su Rey nuevamente contento y que tuviera un pasatiempo para aliviar el peso de su melancolía, eran para él suficiente recompensa.

El Rey volvió a insistir y le ofreció una bolsa llena de oro, un arca llena de joyas, un palacio, o si aspiraba a la administración de una provincia, además no iba a permitir un rechazo a su palabra ligada a una promesa .

El joven Sessa se quedo pensativo y contestó que no el no desobedecería a su Rey, su recompensa iba a estar vinculada a su invento , él no queria bolsas de

oro ni joyas, ni el gobierno de una provincia, quería granos de trigo.

El Rey sorprendido ante tamaña respuesta, contestó que como le podía pedir una recompensa tan insignificante, el joven Lahur Sessa no se inmutó y le pidió que lo dejara terminar, por la primera casilla del tablero colocad un grano de trigo, por el segundo colocad dos, cuatro por el tercer casillero, ocho granos por la cuarta, y así duplicando sucesivamente hasta la sexágesima cuarta y última casilla del tablero, el total de granos empaquetadlo y dádmelo, esa es la recompensa que ante su insistencia solicitó magnánimo Rey.

La carcajada fue general, el Rey, los visires y bracmanes rieron escandalosamente agarrandose el bajo vientre al escuchar la extraña petición del joven. Cuando se calmaron y ante los comentarios y murmuraciones, el Rey se dirigió a Lahur Sessa diciéndole que era un insensato, pues su pedido era ridículo y que con unos cuantos puñados de trigo el premio estaría cumplido, además esa cantidad de trigo solo serviría para calmar por unos días el hambre del último paria y andrajoso de su reino. El joven Lahur sólo contestó - eso lo veremos-.

Ordenó el rey a sus más hábiles algebristas calcular la porción de trigo que Sessa insinuaba para despachar rápidamente al insensato y terminar la jornada de ese día cargado de acontecimientos tan diversos y dispares.

Se retiraron los calculistas mirándosé y riéndose por lo escuchado en la corte.

Pasaron las horas y no regresaban los sabios matemáticos, el rey mandó llamarlos para conocer que sucedía ante cálculo tan simple; regresaron muy preocupados los sabios y ante la insistencia del Rey por saber con cuantos granos se debía recompensar al joven Lahur; respiró profundamente el más sabio de los geómetras, y contestó : Mágnifico Rey ,calculamos el número de granos de trigo y resulta un número que es inconcebible para la imaginación humana. Encontrando con más exactitud a cuantas «ceiras» (unidad de capacidad y peso de la India) corresponde el pedido del joven Sessa, la cantidad de trigo con la que se debe cumplir con el pedido del bracmán, corresponde a una montaña que teniendo por base la ciudad de Taligana , fuese 100 veces más alta que el Himalaya.

La India entera sembrados todos sus campos y arrasadas todas sus ciudades no produciría en un siglo la cantidad de trigo prometida al bracmán Lahur Sessa, el número que expresa esa cantidad contiene 20 guarismos, Rey estás arruinado.

La sorpresa y asombro se dibujaron en el rostro del Rey que comenzó a

sudar frío, pues nunca pensó que por cumplir su promesa se había convertido en pocas horas en un menesteroso.
El bracmán Lahur por cortesía se desdijo públicamente de su pedido e hizo la siguiente reflexión al Rey : « Los hombres más precavidos esquivan la apariencia engañosa de los números y la falsa modestia de los ambiciosos. Más previsor es el que mucho pondera y promete poco, el dominio de uno mismo y de nuestras emociones nos permite tener una visión más exacta de la realidad permitiéndonos tomar decisiones más acertadas».
El Rey premio la sabiduria del bracmán nombrandolo Primer Ministro.
Los consejos y apreciaciones de Lahur sirvieron para que el reino de Taligana progresara, viviendo en paz y armonía durante el tiempo que duró la vida del bracmán al lado de su Rey, con el que jugaron incontables partidas de ajedrez .

Vamos a aplicar el metodo de multiplicación explicado al inicio de este capítulo, para calcular la cantidad de granos de trigo que pedía como recompensa el joven Lahur Sessa al Rey del reino de Taligana, por haber inventado el juego de ajedrez y que llevó tantas horas a sus visires calcularlo.
Al duplicar el primer grano de trigo del primer casillero para seguir duplicando los que se coloquen en las casillas siguientes hasta el 64avo. escaque y luego sumar todos los granos colocados en cada casillero se obtiene la siguiente expresión :

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2^{62} + 2^{63} = \frac{2^{63+1} - 1}{2 - 1}$$

$$= 2^{64} - 1$$

Con este resultado en una computadora o calculadora de 10 dígitos calculamos 2^{32}

entonces : $2^{32} = 42949\ 67296$
Aplicando el método explicado al inicio de este capítulo y con una longitud de « nueva unidad» de 5 caracteres tenemos :

```
                42949 67296 X
                42949 67296
                ------------
                45287 51616 +
          28902 95904
          28902 95904
18446 16601
-------------------------
 SC4    SC3    SC2    SC1
```

Hallando la suma por columnas : SC1 = 51616
SC2 = 45287 + 95904 + 95904 = 2 37095, llevamos 2 a SC3
SC3 = 28902 + 28902 + 16601 + 2 = 74407 no llevamos a SC4
SC4 = 18446

Reemplazando los valores de las nuevas unidades SC1, SC2, SC3, SC4 obtenemos el resultado del número 2^{64} al que debemos restar una unidad :

$$2^{64} - 1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$$

Esta es la cantidad de granos de trigo necesarios para recompensar al bracmán por inventar el juego del ajedrez y que nos ha llevado pocos minutos el calcularlo.

Es bueno mencionar que existe una expresión que genera números primos y es conocido como el número primo de Mersenne, lleva este nombre en honor al sacerdote jesuita del siglo XVI que lo descubrió, este jesuita fue un matemático que conoció y mantuvo correspondencia (que era la forma como se conservaban y trasmitían los descubrimientos de los científicos y estudiosos en esa época, siendo usual lanzar problemas de desafió a otros matemáticos y curiosos ocultándose la solución, para gloria del desafiante) con matemáticos extraordinarios de la talla de Pierre de Fermat, Blaise Pascal, Descartes entre otros, siendo uno de los fundadores de la academia de Ciencias de París.

El número primo de Mersenne tiene la siguiente forma :

$$2^P - 1 = \text{Número Primo}$$

P es un número primo con ciertas caracteristicas (que serán determinadas en los libros especializados en temas de teoría de números por aquellos lectores interesados en investigar o deducidos por sus propios medios), que al ser reemplazado en la fórmula genera más números primos.
Con la invención de las computadoras se han calculado números primos de Mersenne con cantidades inmensas de cifras y la utilidad de estos cálculos permiten conocer la fiabilidad en las operaciones que tienen las computadoras.
El método dado a conocer en este capítulo puede ser llevado a un lenguaje de programación para realizar los cálculos sistematicamente, y conocer el valor exacto de los números de Mersenne.

Actualmente en **INTERNET** se llevan a cabo competencias para determinar números primos con la mayor cantidad de cifras y existe la fórmula $a^2 + b^4 = p$, que está generando muchos números primos, siendo a y b números enteros, para un mayor conocimiento de los números primos a un complejo se le considera primo cuando su módulo genera un número primo.

A principios de marzo de 1999 tuve información por INTERNET que el mayor número primo conocido es :

$$2^{3\,021\,377} - 1$$

Usando logaritmos se puede saber que este número tiene 909 526 caracteres.

En estos trabajos de investigación que vengo realizando desde 1980 arrancándole sus secretos a los números, tratando de encontrar la fórmula que genere todos los números primos,el procedimiento para multiplicar con la PC o calculadora cuando se rebasa la capacidad de pantalla, me sirvió para experimentar y encontrar otras fórmulas, realizando comprobaciones con operaciones que rebasaban la capacidad de pantalla de las PC o calculadoras para otros «experimentos».

CAPITULO IV

METODO DE DIVISION MEDIANTE UNA PC, MAC O CALCULADORA AMPLIANDO SU CAPACIDAD DE OPERACION

Para dividir se utiliza el siguiente algoritmo :

$$\begin{array}{l|l} a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots\ldots\ldots\ldots a_n & d_1\, d_2\, d_3\, d_4 \ldots\ldots\ldots d_m \\ \hline & c_1\, c_2\, c_3\, c_4 \ldots\ldots\ldots c_p \end{array}$$

Donde m, n , p $\in$ N y m < 10, para que la explicación sea más sencilla vamos a tomar los números del dividendo y divisor como enteros.
La pantalla de nuestra PC, MAC o calculadora se supondrá de 10 caracteres, pudiendo trabajar con otras capacidades de pantalla.
Cada cifra c_i del cociente se obtiene una por una, por el algoritmo conocido por todos, con una PC o calculadora podemos ampliar la rapidez y potencia para realizar operaciones que impliquen mayor cantidad de caracteres que nuestra capacidad de pantalla.

Aparentemente no podríamos realizar una operación como esta :

$$83425\ 67800\ 76895\ 54981\ 230 \ \big|\ 65784\ 76$$

En este capítulo vamos a explicar como se realiza esta operación.
Tomemos 10 cifras de la izquierda en el dividendo y dividamoslo con el divisor :

$$\begin{array}{l|l} 83425\ 67800 & 65784\ 76 \\ \hline & 1\ 268{,}161166 \end{array}$$

Tomemos la parte entera del cociente = 1268, este resultado multipliquemoslo por el divisor obteniendo : 6 578 476 x 1 268 = 83415 07568
este resultado restemoslo al «dividendo parcial» :

$$\begin{array}{l|l} 83425\ \ 67800\ \ 76895\ \ 54981\ 230 & 65784\ \ 76 \\ \hline 83415\ \ 07568 & 1268 \\ \hline \quad\ \ 10\ \ 60232 & \end{array}$$

Cuando dividimos manualmente debemos tener cuidado que al bajar la siguiente cifra no contenga el dividendo al divisor, en este caso se pone cero en el cociente;en este método esta regla tambien se debe respetar, fijándose que la siguiente o siguientes cifras que se bajen junto al «nuevo dividendo» originan o no cero en el cociente, sino es así, se deben bajar el

máximo grupo de caracteres que completan la máxima capacidad de pantalla para el dividendo y abreviar las operaciones.
El residuo 10 60232 al fusionarse con la próxima cifra a bajar que es el 7, se juntan y forman el dividendo parcial 106 02327 que es mayor que el divisor por lo cual no tenemos el problema de cero en el cociente que hay que tener en cuenta durante todo este proceso para no cometer equivocaciones.

Haciendo esta salvedad bajamos dos cifras más del dividendo y fusionándolo con el residuo parcial obtenido se forma el «nuevo dividendo» 10 60232 768 que lo dividimos entre el divisor del ejemplo obteniendo :

```
10 60232 768  | 65 78476
              |----------
              | 161.166928
```

Tomamos la parte entera del cociente y lo multiplicamos por el divisor :

65 78476 x 161 = 10 59134 636 que lo restamos al «dividendo parcial» :

```
83425 67800 76895 54981 230 | 6578476
83415 07568                 |----------
   10 60232 768             | 12681 61
   10 59134 636
       1098 132
```

En este punto recordamos que al bajar la próxima cifra esta nos indica si se pone cero en el cociente o no, con esto al fusionar el residuo 1098 132 con la próxima cifra 9 se forma 1098 1329 que si está contenido en el divisor, lo cual nos permite bajar dos cifras más del dividendo y lo fusionamos con el número con el que se hizo la prueba y formamos
1098 13295 5 al que lo dividimos entre el divisor de este ejemplo :

```
10981 32955  | 6 578 476
             |-----------
             | 166,9281692
```

Tomando la parte entera de este cociente c_3 = 166 al cual multiplicamos por el divisor :
6 578 476 x 166 = 1092 02701 6, este resultado se resta al «dividendo parcial»,
el c_3 = 166 lo juntamos con los anteriores cocientes c_1 y c_2 :

```
83425 67800 76895 54981 230 | 6578476
83415 07568                 |----------
   10 60232 768             | 12681 61166
   10 59134 636
       1098 13295 5
       1092 02701 6
          6 10593 9498
```


Nuevamente debemos tener cuidado, bajando la siguiente cifra para juntarlo con este nuevo residuo y formar 6 10593 94 que si esta contenido en el divisor.
Por lo tanto bajamos las dos cifras siguientes para aprovechar la máxima capacidad de nuestra pantalla : 6 10593 9498 dividiéndolo entre el divisor de nuestro problema.

```
6 10593 9498  | 6 578 476
              |-----------
              | 928,1693051
```

Tomamos la parte entera de este cociente c_4 = 928 y multiplicándolo por el divisor :
6 578 476 x 928 = 6 10482 5728 este número se lo restamos al nuevo dividendo y el cociente c_4 lo juntamos a los demás cocientes.

```
83425 67800 76895 54981 230 | 6578476
83415 07568                 |----------
   10 60232 768             | 12681 61166 928
   10 59134 636
       1098 13295 5
       1092 02701 6
          6 10593 9498
          6 10482 5728
              111 3770
```

La cifra 1 la juntamos con el nuevo residuo para saber si esta contenido o no en el divisor 111 37701, el cual si se puede dividir entre el divisor del problema, para utilizar la máxima capacidad de pantalla de nuestra PC o calculadora fusionamos con las cifras del dividendo y obtenemos 111 37701 23,
luego :

```
111 37701 23  | 6 578 476
              |-----------
              | 169,305189
```

Tomando el entero de este cociente c_5 = 169 al que multiplicamos por el divisor :
6 578 476 x 169 = 111 17624 44 y lo restamos al «dividendo parcial» formado anteriormente, el cociente c_5 = 169 lo fusionamos con los demás cocientes que hemos ido obteniendo en este proceso :

```
83425 67800 76895 54981 230|6578476
83415 07568                12681 61166 92816 9
   10 60232 768
   10 59134 636
       1098 13295 5
       1092 02701 6
          6 10593 9498
          6 10482 5728
              111 37701 23
              111 17624 44
                  20076 79
```

A este último residuo le aumentamos la última cifra del dividendo que falta ser bajada y que es el dígito 0 y formamos : 20076 790 al que lo dividimos entre el divisor :

```
20076 790 |6 578 476
          3,051890741
```

El sexto cociente $c_6 = 3$ lo multiplicamos por el divisor obteniendo :
6 578 476 x 3 = 19735 428 que lo restamos al «dividendo parcial» formado, sin olvidarnos de juntar el cociente 3 con los demás cocientes obtenidos.

```
83425 67800 76895 54981 230|6578476
83415 07568                12681 61166 92816 93
   10 60232 768
   10 59134 636
       1098 13295 5
       1092 02701 6
          6 10593 9498
          6 10482 5728
              111 37701 23
              111 17624 44
                  20076 790
                  19735 428
                    341 362
```

Con lo que queda terminada la división, habiendo logrado ampliar nuestra capacidad de pantalla para la PC, MAC o calculadora con este método.

TEMA DE INVESTIGACION

Este algoritmo puede ser llevado a un lenguaje de programación y de esa manera realizar las operaciones rápida y sistemáticamente.
Encontrar el método para dividir con decimales.
Una de las aplicaciones de este método es en la investigación matemática.

CAPITULO V
CONJETURA PARA ENCONTRAR LA CIFRA DECIMAL EN CUALQUIER POSICION EN EL DESARROLLO INFINITO DE A/N

Voy a explicar como razoné para hallar este método :
Siendo A un residuo entero por defecto del correspondiente divisor N, donde N es un número impar diferente de múltiplo de 5.
Encontré que la cifra decimal de posición i en el desarrollo infinito de A/N se puede hallar de otra manera a la que hemos aprendido, que es dividiendo secuencialmente; es decir para encontrar la siguiente cifra del cociente necesito conocer la anterior .
Con esta nueva forma de dividir no necesito conocer la cifra anterior, pues esta se puede determinar en cualquier posición sin conocer los decimales anteriores.
Para esto el primer paso es conocer algunas tablas de cocientes de todos los residuos entre un divisor dado, los decimales obtenidos son decimales periodicos puros y por razones de espacio no vamos a usar el arco de su representación :

DIVISOR 3

1/3 = 0. 3
2/3 = 0. 6

DIVISOR 7

1/7 = 0. 1 4 2 8 5 7
2/7 = 0. 2 8 5 7 1 4
3/7 = 0. 4 2 8 5 7 1
4/7 = 0. 5 7 1 4 2 8
5/7 = 0. 7 1 4 2 8 5
6/7 = 0. 8 5 7 1 4 2

DIVISOR 11

1/11= 0. 0 9
2/11 = 0. 1 8
3/11 = 0. 2 7
4/11 = 0. 3 6
5/11 = 0. 4 5
6/11 = 0. 5 4
7/11 = 0. 6 3
8/11 = 0. 7 2
9/11 = 0. 8 1
10/11= 0. 9 0

DIVISOR 13

1/13 = 0. 0 7 6 9 2 3
2/13 = 0. 1 5 3 8 4 6
3/13 = 0. 2 3 0 7 6 9
4/13 = 0. 3 0 7 6 9 2
5/13 = 0. 3 8 4 6 1 5
6/13 = 0. 4 6 1 5 3 8
7/13 = 0. 5 3 8 4 6 1
8/13 = 0. 6 1 5 3 8 4
9/13 = 0. 6 9 2 3 0 7
10/13 = 0. 7 6 9 2 3 0
11/13 = 0. 8 4 6 1 5 3
12/13 = 0. 9 2 3 0 7 6

DIVISOR 17

1/17 = 0. 0 5 8 8 2 3 5 2 9 4 1 1 7 6 4 7
2/17 = 0. 1 1 7 6 4 7 0 5 8 8 2 3 5 2 9 4
3/17 = 0. 1 7 6 4 7 0 5 8 8 2 3 5 2 9 4 1
4/17 = 0. 2 3 5 2 9 4 1 1 7 6 4 7 0 5 8 8
5/17 = 0. 2 9 4 1 1 7 6 4 7 0 5 8 8 2 3 5
6/17 = 0. 3 5 2 9 4 1 1 7 6 4 7 0 5 8 8 2
7/17 = 0.4 1 1 7 6 4 7 0 5 8 8 2 3 5 2 9
8/17 = 0. 4 7 0 5 8 8 2 3 5 2 9 4 1 1 7 6
9/17 = 0. 5 2 9 4 1 1 7 6 4 7 0 5 8 8 2 3
10/17= 0. 5 8 8 2 3 5 2 9 4 1 1 7 6 4 7 0
11/17 = 0. 6 4 7 0 5 8 8 2 3 5 2 9 4 1 1 7
12/17 = 0. 7 0 5 8 8 2 3 5 2 9 4 1 1 7 6 4
13/17 = 0. 7 6 4 7 0 5 8 8 2 3 5 2 9 4 1 1
14/17 = 0. 8 2 3 5 2 9 4 1 1 7 6 4 7 0 5 8
15/17 = 0. 8 8 2 3 5 2 9 4 1 1 7 6 4 7 0 5
16/17 = 0. 9 4 1 1 7 6 4 7 0 5 8 8 2 3 5 2

DIVISOR 19

1/19 = 0. 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1
2/19 = 0. 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2
3/19 = 0. 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3
4/19 = 0. 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4
5/19 = 0. 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1 0 5
6/19 = 0. 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1 0 5 2 6
7/19 = 0. 3 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7
8/19 = 0. 4 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8
9/19 = 0. 4 7 3 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9
10/19 = 0. 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1 0
11/19 = 0. 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3 1
12/19 = 0. 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1 0 5 2
13/19 = 0. 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3
14/19= 0. 7 3 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4
15/19= 0. 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3 1 5
16/19= 0. 8 4 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6
17/19= 0. 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7
18/19= 0. 9 4 7 3 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8

DIVISOR 23

1/23 =0. 0 4 3 4 7 8 2 6 0 8 6 9 5 6 5 2 1 7 3 9 1 3
2/23 =0. 0 8 6 9 5 6 5 2 1 7 3 9 1 3 0 4 3 4 7 8 2 6
3/23 =0. 1 3 0 4 3 4 7 8 2 6 0 8 6 9 5 6 5 2 1 7 3 9
4/23 =0. 1 7 3 9 1 3 0 4 3 4 7 8 2 6 0 8 6 9 5 6 5 2
5/23 =0. 2 1 7 3 9 1 3 0 4 3 4 7 8 2 6 0 8 6 9 5 6 5
6/23 =0. 2 6 0 8 6 9 5 6 5 2 1 7 3 9 1 3 0 4 3 4 7 8
7/23 =0. 3 0 4 3 4 7 8 2 6 0 8 6 9 5 6 5 2 1 7 3 9 1
8/23 =0. 3 4 7 8 2 6 0 8 6 9 5 6 5 2 1 7 3 9 1 3 0 4
9/23 =0. 3 9 1 3 0 4 3 4 7 8 2 6 0 8 6 9 5 6 5 2 1 7
10/23 =0. 4 3 4 7 8 2 6 0 8 6 9 5 6 5 2 1 7 3 9 1 3 0
11/23 =0. 4 7 8 2 6 0 8 6 9 5 6 5 2 1 7 3 9 1 3 0 4 3
12/23 =0. 5 2 1 7 3 9 1 3 0 4 3 4 7 8 2 6 0 8 6 9 5 6
13/23 =0. 5 6 5 2 1 7 3 9 1 3 0 4 3 4 7 8 2 6 0 8 6 9
14/23 =0. 6 0 8 6 9 5 6 5 2 1 7 3 9 1 3 0 4 3 4 7 8 2
15/23 =0. 6 5 2 1 7 3 9 1 3 0 4 3 4 7 8 2 6 0 8 6 9 5
16/23 =0. 6 9 5 6 5 2 1 7 3 9 1 3 0 4 3 4 7 8 2 6 0 8
17/23 =0. 7 3 9 1 3 0 4 3 4 7 8 2 6 0 8 6 9 5 6 5 2 1
18/23 =0. 7 8 2 6 0 8 6 9 5 6 5 2 1 7 3 9 1 3 0 4 3 4
19/23 =0. 8 2 6 0 8 6 9 5 6 5 2 1 7 3 9 1 3 0 4 3 4 7
20/23 =0. 8 6 9 5 6 5 1 7 3 9 1 3 0 4 3 4 7 8 2 6 0 8
21/23 =0. 9 1 3 0 4 3 4 7 8 2 6 0 8 6 9 5 6 5 2 1 7 3
22/23 =0. 9 5 6 5 2 1 7 3 9 1 3 0 4 3 4 7 8 2 6 0 8 6

DIVISOR 29

1/29 = 0. 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1
2/29 = 0. 0 6 8 9 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2
3/29 = 0. 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3
4/29 = 0. 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5 1 7 2 4
5/29 = 0. 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5
6/29 = 0. 2 0 6 8 9 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6
7/29 = 0. 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5 1 7
8/29 = 0. 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8
9/29 = 0. 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9
10/29 = 0. 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0
11/29 = 0. 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5 1 7 2 4 1
12/29 = 0. 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5 1 7 2
13/29 = 0. 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3
14/29 = 0. 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4
15/29 = 0. 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5
16/29 = 0. 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6
17/29 = 0. 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7
18/29 = 0. 6 2 0 6 8 9 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8
19/29 = 0. 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9

20/29 = 0. 6 8 9 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0
21/29 = 0. 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5 1
22/29 = 0. 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2
23/29 = 0. 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5 1 7 2 4 1 3
24/29 = 0. 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4
25/29 = 0. 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5
26/29 = 0. 8 9 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6
27/29 = 0. 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 9 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7
28/29 = 0. 9 6 5 5 1 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8

DIVISOR 31

1/31 = 0. 0 3 2 2 5 8 0 6 4 5 1 6 1 2 9
2/31 = 0. 0 6 4 5 1 6 1 2 9 0 3 2 2 5 8
3/31 = 0. 0 9 6 7 7 4 1 9 3 5 4 8 3 8 7
4/31 = 0. 1 2 9 0 3 2 2 5 8 0 6 4 5 1 6
5/31 = 0. 1 6 1 2 9 0 3 2 2 5 8 0 6 4 5
6/31 = 0. 1 9 3 5 4 8 3 8 7 0 9 6 7 7 4
7/31 = 0. 2 2 5 8 0 6 4 5 1 6 1 2 9 0 3
8/31 = 0. 2 5 8 0 6 4 5 1 6 1 2 9 0 3 2
9/31 = 0. 2 9 0 3 2 2 5 8 0 6 4 5 1 6 1
10/31 = 0. 3 2 2 5 8 0 6 4 5 1 6 1 2 9 0
11/31 = 0. 3 5 4 8 3 8 7 0 9 6 7 7 4 1 9
12/31 = 0. 3 8 7 0 9 6 7 7 4 1 9 3 5 4 8
13/31 = 0. 4 1 9 3 5 4 8 3 8 7 0 9 6 7 7
14/31 = 0. 4 5 1 6 1 2 9 0 3 2 2 5 8 0 6
15/31 = 0. 4 8 3 8 7 0 9 6 7 7 4 1 9 3 5
16/31 = 0. 5 1 6 1 2 9 0 3 2 2 5 8 0 6 4
17/31 = 0. 5 4 8 3 8 7 0 9 6 7 7 4 1 9 3
18/31 = 0. 5 8 0 6 4 5 1 6 1 2 9 0 3 2 2
19/31 = 0. 6 1 2 9 0 3 2 2 5 8 0 6 4 5 1
20/31 = 0. 6 4 5 1 6 1 2 9 0 3 2 2 5 8 0
21/31 = 0. 6 7 7 4 1 9 3 5 4 8 3 8 7 0 9
22/31 = 0. 7 0 9 6 7 7 4 1 9 3 5 4 8 3 8
23/31 = 0. 7 4 1 9 3 5 4 8 3 8 7 0 9 6 7
24/31 = 0. 7 7 4 1 9 3 5 4 8 3 8 7 0 9 6
25/31 = 0. 8 0 6 4 5 1 6 1 2 9 0 3 2 2 5
26/31 = 0. 8 3 8 7 0 9 6 7 7 4 1 9 3 5 4
27/31 = 0. 8 7 0 9 6 7 7 4 1 9 3 5 4 8 3
28/31 = 0. 9 0 3 2 2 5 8 0 6 4 5 1 6 1 2
29/31 = 0. 9 3 5 4 8 3 8 7 0 9 6 7 7 4 1
30/31 = 0. 9 6 7 7 4 1 9 3 5 4 8 3 8 7 0

Estas tablas sirven para encontrar las conjeturas del libro «INVESTIGACION MATEMATICA» del que soy autor, publicado en agosto de 1998 por Editorial San Marcos.
Al clasificar las cifras que son iguales y contarlas se deducen las reglas que se han escrito

en el mencionado libro; esto lo dejo como ejercicio para el lector.
Los cocientes han sido hallados con el método del eslabón.

EL CERO ME DIO LA CLAVE

Al observar estas tablas y fijándome en las columnas de décimos, centésimos, milésimos, i-esimos etc , el cero me dio la clave (no estoy considerando el 0 de la parte entera del cociente) para desarrollar este método.
Por ejemplo en las divisiones entre 19 se observa lo siguiente en : 1 / 19 = 0. **0**..... el cero aparece en la cifra de décimos y en el residuo 1; luego en 2 / 19 = 0. 1 **0**..... el cero aparece en el residuo 2 y en la posición de centésimos; en 4 / 19 = 0. 21 **0**.... el cero aparece en el residuo 4 y en la posición de milésimos; en 8 / 19 = 0. 421 **0**..... el cero aparece en el residuo 8 y es la cifra de diez milésimos; en 16 / 19 = 0. 8421 **0**..... el cero aparece en la posición de cien milésimos y en el residuo 16.
Como primer paso agrupemos los residuos de estos casos : 1, 2, 4, 8, 16 ¿ qué guardan en común estos residuos? , después de observar y pensar nos damos cuenta que son potencias consecutivas de 2, es decir 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4.
Con estos resultados el siguiente residuo que contiene a l cero en la posición de millonésimos es ..... 2^5 = 32, pero en nuestra tabla no aparece el residuo 32, (el lector puede verificar que al dividir 32 / 19 = 1. 68421 **0** 5.....), cuando comencé a encontrar el método de este capítulo, este obstáculo lo sortee de la siguiente manera, al residuo 32 le aplique módulo 19 (el módulo de un número A con respecto a otro B nos indica el residuo que se obtiene en la división entera de A / B) para experimentar y conocer que residuo deja 32 con respecto a 19.

32 = mod 19 + 13.

Entonces comprobe en la tabla que 13 / 19 = 0. 68421 **0**....., ¡el 0 apareció en la posición de millonésimos !, esto me animo a probar con 2^6 = 64, hallé el residuo de 64 con respecto a 19.

64 = mod 19 + 7

Luego en la tabla se encuentra 7 / 19 = 0. 368421 **0**..... el cero apareció en la posición de diez millonésimos, esto hizo que tomara más confianza en lo que estaba suponiendo y probé con 2^7 = 128 hallando :

128 = mod 19 + 14

luego al fijarme en la tabla observe que 14 / 19 = 0. 7368421 **0** 5... el cero aparecía en la posición de cien millonésimos, entonces lo que estaba conjeturando parecía válido, es decir el cero se movía a la derecha una posición, cada vez que aumentaba en uno el exponente de 2 y le aplicaba módulo 19, por lo que realicé las siguientes pruebas con las potencias consecutivas de 2 :
2^8 = 256 = mod 19 + 9 entonces 9 / 19 = 0. 47368421 **0**....., el 0 aparece en la posición de mil millonésimos.
2^9 = 512 = mod 19 + 18 entonces 18 / 19 = 0. 947368421 **0**..... el 0 aparece en la posición de diez mil millonésimos.
2^{10} = 1024 = mod 19 + 17 entonces 17 / 19 = 0. 8947368421 **0**..... el 0 aparece en la posición de cien mil millonésimos.
2^{11} = 2048 = mod 19 + 15 entonces 15/19 = 0. 78947368421 **0** el 0 aparece en la posición de billonésimos.

2^{12} = 4096 = mod 19 + 11 entonces 11/19 = 0.578947368421 **0** el 0 aparece en la posición de diez billonésimos.
2^{13} = 8192 = mod 19 + 3 entonces 3/19 = 0.1578947368421 **0** el 0 ocupa la posición de cien billonésimos.
2^{14} = 16 384 = mod 19 + 6 en 6/19 = 0.31578947368421 **0** el 0 ocupa la posición de mil billonésimos.
2^{15} = 32 768 = mod 19 + 12 en 12/19 = 0.631578947368421 **0** el o ocupa la posición de diez mil billonésimos.
2^{16} = 65 536 = mod 19 + 5 en 5 / 19 = 0. 2631578947368421 **0**..... el 0 ocupa la posición de cien mil billonésimos.
2^{17} = 131 072 = mod 19 + 10 en 10 / 19 = 0. 52631578947368421 **0**..... el 0 ocupa la posición de trillonésimos.
Con estos resultados sentí que estaba descifrando parte de este enigma, a continuación conjeture que en cada división el cero se desplazaba una posición más, al aumentar en uno la potencia de 2 y obtener su residuo con respecto al módulo 19; este residuo obtenido se debía dividir entre 19, y en el cociente comprobaba la aparición del cero en la posición «predecida».

Más preguntas comenzaron a inquietarme, ¿pero las demás cifras como las hallaría? ¿como se regía su desplazamiento? , por ahora tenía una regla empírica para el desplazamiento del 0, ¿pero para las demás cifras, su desplazamiento que regla las dominaba? ¿por qué para 19 se necesitaba la potencia 2? ¿ para otros números impares que potencia dominaba el desplazamiento del cero?

Para visualizar mejor los resultados construyamos la siguiente tabla ordenando por columnas las anteriores divisiones :

1/19 =0.0....	2^0 =	1= mod 19 + 1
2/19 = 0.10....	2^1 =	2= mod 19 + 2
4/19 = 0.210....	2^2 =	4 = mod 19 + 4
8/19 = 0.4210....	2^3 =	8 = mod 19 + 8
16/19 = 0.84210....	2^4 =	16 = mod 19 + 16
13/19 = 0.684210....	2^5 =	32 = mod 19 + 13
7/19 = 0.3684210....	2^6 =	64 = mod 19 + 7
14/19 = 0.73684210....	2^7 =	128 = mod 19 + 14
9/19 = 0.473684210....	2^8 =	256 = mod 19 + 9
18/19 = 0.9473684210....	2^9 =	512 = mod 19 + 18
17/19 = 0.89473684210....	2^{10} =	1 024 = mod 19 + 17
15/19 = 0.789473684210....	2^{11} =	2 048 = mod 19 + 15
11/19 = 0.5789473684210....	2^{12} =	4 096 = mod 19 + 11
3/19 = 0.15789473684210....	2^{13} =	8 192 = mod 19 + 3
6/19 = 0.315789473684210....	2^{14} =	16 384 = mod 19 + 6
12/19 = 0.6315789473684210....	2^{15} =	32 768 = mod 19 + 12
5/19 = 0.26315789473684210....	2^{16} =	65 536 = mod 19 + 5
10/19 = 0.526315789473684210....	2^{17} =	131 072 = mod 19 + 10

De este ordenamiento podemos sacar varias conclusiones : al tomar las potencias consecutivas de 2 con respecto al módulo 19, los residuos al dividirlos entre 19 nos indican el orden de aparición del 0 en el cociente, el cual va avanzando una posición más hacia la derecha a medida que aumenta el exponente en uno de la base 2; la posición donde aparecerá el cero lo da el exponente de 2 más la unidad.

Luego comence a compararlo con otras divisiones y la similitud aparece con las divisiones entre 29, acá vemos que el cero aparece en :

1/29 = 0. **0** .....
3/29 = 0.1 **0** .....
9/29 = 0.31 **0** .....
27/29 = 0.931 **0**.....

Los residuos son 1, 3, 9, 27 que se reconoce son potencias consecutivas de 3, y que nos hacen recordar lo que sucedía con el análisis del divisor 19.

Al comparar que sucedía con las conjeturas anteriores del divisor 19, observé que los residuos estan regidos por la base 3 respecto al módulo 29, por lo tanto hacemos el experimento 3^4 = 81 = mod 29 + 23 igual que en el caso del divisor 19.
Si nuestra suposición es correcta en el cociente de 23/29 el cero aparece en la siguiente posición, hacia la derecha en los cien milésimos.
Dividamos y veamos que sucede ..... 23/29 = 0. 7931**0**..... comprobamos que lo supuesto de que el 0 aparecerá en la siguiente posición, es decir en la de cien milésimos se cumple. El siguiente residuo lo hallamos aumentando en uno el exponente de 3 y aplicamos módulo 29, obteniendo : 3^5 = 243 = mod 29 + 11, comprobando que en 11/29 = 0.379310..... el 0 aparece en la posición siguiente la de millonésimos, lo cual va dando más consistencia a lo que estamos suponiendo, de que al dividir los residuos que se van obteniendo de las potencias de 3 respecto al módulo 29 y dividir este residuo entre 29 , al aumentar el exponente de dicha base de uno en uno,estos cocientes nos irán dando la posición del cero en las divisiones, que estará indicado por el exponente de la base tres más uno.
Para seguir con este proceso de investigación compartido con el lector, construimos la siguiente tabla :

1/29 = 0.0....	3^0 =	1 = mod 29 + 1
3/29 = 0.10....	3^1 =	3 = mod 29 + 3
9/29 = 0.310...	3^2 =	9 = mod 29 + 9
27/29 = 0.9310....	3^3 =	27 = mod 29 + 27
23/29 = 0.79310....	3^4 =	81 = mod 29 + 23
11/29 = 0.379310....	3^5 =	243 = mod 29 + 11
4/29 = 0.1379310....	3^6 =	729 = mod 29 + 4
12/29 = 0.41379310....	3^7 =	2187 = mod 29 + 12
7/29 = 0.241379310....	3^8 =	6561 = mod 29 + 7
21/29 = 0.7241379310....	3^9 =	19683 = mod 29 + 21

5/29 = 0.17241379310....	3^{10} =	59049	= mod 29 + 5
15/29 = 0.517241379310....	3^{11} =	177147	= mod 29 + 15
16/29 = 0.5517241379310....	3^{12} =	531441	= mod 29 + 16
19/29 = 0.65517241379310....	3^{13} =	1 594323	= mod 29 + 19
28/29 = 0.965517241379310....	3^{14} =	4 782969	= mod 29 + 28
26/29 = 0.8965517241379310....	3^{15} =	14 348907	= mod 29 + 26
20/29 = 0.68965517241379310....	3^{16} =	43 046721	= mod 29 + 20
2/29 = 0.068965517241379310....	3^{17} =	129 140163	= mod 29 + 2
6/29 = 0.20689655`7241379310....	3^{18} =	387 420489	= mod 29 + 6
18/29 = 0.62068965517241379310....	3^{19} =	1162 261467	= mod 29 + 18
25/29 = 0.862068965517241379310....	3^{20} =	3486 784401	= mod 29 + 25
17/29 = 0.5862068965517241379310....	3^{21} =	10460 353203	= mod 29 + 17
22/29 = 0.75862068965517241379310....	3^{22} =	31381 059609	= mod 29 + 22
8/29 = 0.275862068965517241379310....	3^{23} =	94143 178827	= mod 29 + 8
24/29 = 0.8275862068965517241379310....	3^{24} =	282429 536481	= mod 29 + 24
14/29 = 0.48275862068965517241379310....	3^{25} =	847288 609443	= mod 29 + 14
13/29 = 0.448275862068965517241379310....	3^{26} =	2541865 828329	= mod 29 + 13
10/29 = 0.3448275862068965517241379310....	3^{27} =	7625597 484987	= mod 29 + 10

En esta tabla tambien comprobamos que la aparición del 0 en los residuos al dividir entre 29, esta regido por la base 3 cuando el exponente aumenta de uno en uno respecto al módulo 29, cumpliendosé lo que estamos suponiendo.
Cuando esta conjetura la compruebo en 29, paso a experimentar con 39 y verifico que esta regido por las potencias de 4, con 49 la regia las potencias de 5, 59 estaba regido por las potencias de 6 etc., de estos experimentos deduzco que cuando el divisor acababa en nueve se debía agregar 1 a este divisor y dividirlo entre 10 para tener la base que rige la aparición de los ceros en la posición de i-ésimos al aumentar el exponente de uno en uno y enuncio la siguiente regla práctica :

Cuando el divisor termina en nueve y es de la forma $C = 10k + 9$ donde $k \in N$, y se quiere conocer la aparición del cero en la posición de i-esimos en los decimales originados por la división de los residuo por defecto de C entre C, estos se obtienen por el residuo que deja la potencia obtenida de la expresión $b = (10k + 9 +1)/10$ a la que llamaremos base, al ir aumentando de uno en uno los exponentes de la base b respecto al módulo C, dicho exponente de la base más la unidad nos indicará la posición donde aparecerá el cero

TEMA DE INVESTIGACION

Para los casos en que el número impar termina en 1, 3 ó 7 dejo al lector para que él deduzca las reglas para conocer la aparición del cero.
Observar que sucede en otros sistemas de numeración.

LA FUSION

Continuando con nuestros «experimentos» al observar las tablas de cocientes y observar las columnas de décimos, centésimos, milésimos,..... i-ésimos etc. hice un descubrimiento que

me lleno de asombro : en cada columna intervenían la misma cantidad de cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. 8, 9.
Por ejemplo en el divisor 19, en cualquier columna de los decimales el lector puede comprobar que intervienen 1 cifra 0, 2 cifras 1, 2 cifras 2, 2 cifras 3, 2 cifras 4, 2 cifras 5, 2 cifras 6, 2 cifras 7, 2 cifras 8 y 1 cifra 9.
En el divisor 31 el lector comprobará que en cualquier columna siempre intervienen 3 cifras 0, 3 cifras 1, 3 cifras 2, 3 cifras 3, 3 cifras 4, 3 cifras 5, 3 cifras 6, 3 cifras 7, 3 cifras 8, 3 cifras 9; al descubrir esto continué verificando para otros divisores y siempre sucedía lo mismo, en la columna de i-ésimos que se tome siempre interviene la misma cantidad de cifras necesarias para escribir todos los números del sistema decimal de numeración.
En este punto ya intuía que algo más importante estaba por descubrir y es cuando recuerdo que la cantidad de cifras que estaban apareciendo en cada columna, eran las que se necesitaban para escribir el o los periodos patrones de un número impar que no sea múltiplo de 5 y que publiqué en los libros «INVESTIGACION MATEMATICA SOBRE PERIODOS DE NUMEROS PRIMOS» en junio de 1998 y en el libro «INVESTIGACION MATEMATICA» en agosto de 1998 de la Editorial San Marcos; en este punto en que relaciono estas dos ideas sobre la aparición constante de las cifras del sistema decimal en la misma cantidad, en cada columna con la conjetura de la cantidad de cifras que se necesitan para escribir los periodos patrones, ha sido uno de los momentos más satisfactorios de mi vida y es una de las razones por las cuales he continuado con este esfuerzo de investigar durante tanto tiempo, por eso invito al lector interesado en estos estudios en este campo ú otro de su interés iniciarlos; al principio será difícil pero la constancia será su aliado, pues con el tiempo empezará a encontrar resultados.

Continuando con el tema de este capitulo, al comprobar que en cada columna intervenían la misma cantidad de cifras, lo siguiente era descubrir como era el desplazamiento de las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 por columna.

Voy a explicar como lo deduje tomando como divisor a 19 para que sea más fácil de entender, **me fijé en la columna de centésimos**, el cero aparece en el residuo 2, el primer 1 aparece en el residuo 4, el segundo 1 en el residuo 6, el primer 2 en el residuo 8, el segundo 2 en el residuo 10, el primer 3 en el residuo 12, el segundo 3 en el residuo 14, el primer 4 en el residuo 16, el segundo 4 en el residuo 18 de esto podemos observar que los residuos aumentan de dos en dos. **Observación** : En esta columna el cero se ubica con la base 2^1.

Entonces para saber donde aparece el primer 5, a 18 le sumamos 2 y obtenemos 20 que es mayor que 19, entonces a 20 le restamos 19 y obtenemos 1, comprobamos que en el residuo 1 aparece el primer 5, de acá para adelante seguimos sumando 2 y veamos lo que sucede: el segundo 5 aparece en el residuo 3, el primer 6 aparece en el residuo 5, el segundo 6 aparece en el residuo 7, el primer 7 aparece en el residuo 9, el segundo 7 aparece en el residuo 11, el primer 8 aparece en el residuo 13, el segundo 8 aparece en el residuo 15 y el único 9 aparece en el residuo 17. El lector comprobará estas observaciones en las tablas escritas al inicio de este capítulo.

La correspondencia biunívoca entre cifras necesarias del sistema decimal para escribir el o los periodos patrones y su ubicación en la columna de décimos esta dada por los residuos que son múltiplos de 2, ahora cuando el residuo es mayor de 19 se le aplicará módulo 19 para saber el próximo residuo.
Tomemos otra columna para ver que está sucediendo, elegimos la de diez milésimos :
El 0 aparece en la posición del residuo 8, el primer 1 en el residuo 16, (parece que son los residuos múltiplos de 8): continuemos, a 16 le sumamos 8 y obtenemos 24 número al que le restamos 19 obteniendo residuo 5 que es donde aparece el segundo 1, a 5 le sumamos 8 y obtenemos 13 que es el residuo donde aparece el primer 2, a 13 le sumamos 8 y obtenemos 21 al que le restamos 19 obteniendo 2 que es el residuo donde aparece el segundo 2, a 2 le sumamos 8 obteniendo 10 que es donde aparece el primer 3, a 10 le sumamos 8 obteniendo 18 que es el residuo donde aparece el segundo 3, a 18 le sumamos 8 y obtenemos 26 al que le restamos 19 dandonos 7 que es el residuo donde aparece el primer 4 , a 7 le sumamos 8 y obtenemos 15 que es donde aparece el segundo 4, a 15 le sumamos 8 obteniendo 23 , número al que le restamos 19 dándonos 4 que es el residuo donde aparece el primer 5.

Observación : La aparición del cero se determina en esta columna por $2^3 = 8$ y justamente lo veremos más adelante este resultado con respecto al módulo del divisor con que estemos trabajando determinará el avance de las cifras necesarias para escribir los periodos patrones.

En este momento, el lector estará imaginándose como es el proceso de ubicación de las cifras por columnas (del periodo patrón de 19) en los residuos, esto se hará en base a los múltiplos del residuo que se obtienen de la potencia de 2 para la aparición del cero en dicha columna, respecto al módulo 19 y que dominara el desplazamiento y ubicación de las cifras usadas para escribir el periodo patron de 19.

El segundo 5 lo ubicamos en el residuo resultado de la siguiente suma «4 + 8 = 12», en el residuo 12 comprobamos la aparición del segundo 5, a 12 le sumamos 8 obteniendo 20 que le restamos 19 obteniendo 1 que es el residuo donde aparece el primer 6, a 1 le sumamos 8 obteniendo 9 que es el residuo donde aparece el segundo 6, a 9 le sumamos 8 dándonos 17 que es el residuo donde aparece el primer 7, siguiendo con este proceso a 17 le sumamos 8 obteniendo 25 al que le restamos 19 obteniendo 6 que es el residuo donde aparece el segundo 7, a 6 le sumamos 8 dándonos 14 que es el residuo donde aparece el primer 8 , a 14 le sumamos 8 dándonos 22 al que le restamos 19 obteniendo 3 que es el residuo donde aparece el segundo 8 y finalmente a 3 le sumamos 8 obteniendo 11 que es donde aparece el único 9, al hacer esto si al residuo 11 le sumamos 8 obtendremos 19 y si le restamos 19 obtendremos cero, el proceso está terminado.
Como se puede comprobar en las tablas, el desplazamiento por columnas de las cifras del periodo patrón de 19, está regido por un movimiento dado por los múltiplos del residuo de la potencia de 2 respecto al módulo 19 que nos indica la ubicación del cero en dicha columna.

PRIMER EJEMPLO

Si tomamos la columna de decimales No. 13 y queremos ubicar las cifras necesarias para escribir el período patrón de 19, en los 18 espacios correspondientes a los residuos, debemos

hacer lo siguiente :

$$2^{13-1} = 2^{12} = 4\,096 = \text{mod } 19 + 11$$

El residuo 11 nos indica el desplazamiento y ubicación de las cifras para escribir el periodo patrón de 19, que se desplazarán según los residuos múltiplos de 11.
Si en el proceso de agregar 11 se sobrepasa 18 se le aplicará módulo 19 (en forma práctica se restará 19) para saber en que residuo se irán ubicando una a una las cifras del periodo patrón de 19.

Para entender esto en forma abreviada construiremos la siguiente tabla :

	En el residuo 11 aparece el primer 0
En 11 + 11 = 22 = mod 19 + 3	en el residuo 3 aparece el primer 1
En 3 + 11 = 14	en el residuo 14 aparece el segundo 1
En 14 + 11 = 25 = mod 19 + 6	en el residuo 6 aparece el primer 2
En 6 + 11 = 17	en el residuo 17 aparece el segundo 2
En 17 + 11 = 28 = mod 19 + 9	en el residuo 9 aparece el primer 3
En 9 + 11 = 20 = mod 19 + 1	en el residuo 1 aparece el segundo 3
En 1 + 11 = 12	en el residuo 12 aparece el primer 4
En 12 + 11 = 23 = mod 19 + 4	en el residuo 23 aparece el segundo 4
En 4 + 11 = 15	en el residuo 15 aparece el primer 5
En 15 + 11 = 26 = mod 19 + 7	en el residuo 7 aparece el segundo 5
En 7 + 11 = 18	en el residuo 18 aparece el primer 6
En 18 + 11 = 29 = mod 19 + 10	en el residuo 10 aparece el segundo 6
En 10 + 11 = 21 = mod 19 + 2	en el residuo 2 aparece el primer 7
En 2 + 11 = 13	en el residuo 13 aparece el segundo 7
En 13 + 11 = 24 = mod 19 + 5	en el residuo 5 aparece el primer 8
En 5 + 11 = 16	en el residuo 16 aparece el segundo 8
En 16 + 11 = 27 = mod 19 + 8	en el residuo 8 aparece el único 9

Con este método hemos completado toda la columna de decimales No. 13 de las divisiones entre el divisor 19 sin necesidad de conocer las anteriores del cociente.
El lector puede corrobarlo observando las tablas de este capítulo, y a modo de práctica elija una columna cualquiera de decimales y aplique lo estudiado en este capítulo

PRIMERA APLICACION

Tomemos el número 249 y encontremos en que residuo en la posición de diez millonésimos aparece el tercer uno necesario para escribir el ó los periodos patrones de 249.
SOLUCION :
Hallemos la base que domina al número 249 $b = (249 + 1)/ 10 = 25$
Luego, para el número 249 se necesitan las siguientes cifras para escribir el ó los periodos patrones.

$249 = 10 \times (\mathbf{24}) + 9 \quad \mathbf{k = 24}$, entonces se necesitan 24 cifras 0, y 9 de c/u

y 25 cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 de c/u

La posición de diez millonésimos corresponde a la columna 7 al realizar un ordenamiento similar al de las tablas de este capitulo.

Entonces $25^{7-1} = 25^6 = \text{mod } 249 + r$, donde r es el residuo que originará las posiciones al ir sumandolé r sucesivamente y aplicandolé módulo 249; en estos residuos se ubicarán una a una las cifras necesarias para escribir el o los periodos patrones de 249 en la columna de diez millonésimos.
En otros análisis posteriores por parte del lector cuando los exponentes de la base generen números muy altos y aparentemente inmanejables, explicó una forma más rápida para trabajar con expresiones de este tipo (*).

Transformando el exponente adecuadamente :
$(25^3)^2 = 15625^2 = (\text{mod } 249 + 187)^2 = \text{mod } 249 + 187^2 = \text{mod } 249 + 34969$
$= \text{mod } 249 + 109$

Construyamos la tabla de residuos con su correspondiente cifra decimal :

	En el residuo 109 aparece el primer 0
En 109 + 109 = 218 =	En el residuo 218 aparece el segundo 0
En 218 +109 = 327 = mod 249 + 78	En el residuo 78 aparece el tercer 0
En 78 + 109 = 187	En el residuo 187 aparece el cuarto 0
En 187 + 109 = 296 = mod 249 + 47	En el residuo 47 aparece el quinto 0
En 47 + 109 = 156	En el residuo 156 aparece el sexto 0
En 156 + 109 = 265 = mod 249 + 16	En el residuo 16 aparece el setimo 0
En 16 + 109 = 125	En el residuo 125 aparece el octavo 0
En 125 + 109 = 234	En el residuo 234 aparece el noveno 0
En 234 + 109 = 343 = mod 249 + 94	En el residuo 94 aparece el décimo 0
En 94 + 109 = 203	En el residuo 203 aparece el décimo primer 0
En 203 + 109 = 312 = mod 249 + 63	En el residuo 63 aparece el décimo segundo 0
En 63 + 109 = 172	En el residuo 172 aparece el décimo tercer 0
En 172 + 109 = 281 = mod 249 + 32	En el residuo 32 aparece el décimo cuarto 0
En 32 + 109 = 141	En el residuo 141 aparece el décimo quinto 0
En 141 + 109 = 250 = mod 249 + 1	En el residuo 1 aparece el décimo sexto 0
En 1 + 109 = 110	En el residuo 110 aparece el décimo setimo 0
En 110 + 109 = 219	En el residuo 219 aparece el décimo octavo 0
En 219 + 109 = 328 = mod 249 + 79	En el residuo 79 aparece el décimo noveno 0
En 79 + 109 = 188	En el residuo 188 aparece el vigésimo 0
En 188 + 109 = 297 = mod 249 + 48	En el residuo 48 aparece el vigésimo primer 0
En 48 + 109 = 157	En el residuo 157 aparece el vigésimo segund. 0
En 157 + 109 = 266 = mod 249 + 17	En el residuo 17 aparece el vigésimo tercer 0
En 17 + 109 = 126	En el residuo 126 aparece el vigesimo cuarto 0
En 126 + 109 = 235	En el residuo 235 aparece el primer 1
En 235 + 109 = 344 = mod 249 + 95	En el residuo 95 aparece el segundo 1

(*) En estos cálculos se pueden usar los Teoremas de Fermat o Euler.

En 95 + 109 = 204 En el residuo 204 aparece el tercer 1
La respuesta al problema es en el residuo 204.

Vamos a comprobar lo expuesto realizando las divisiones y verificándolo en la sétima columna es decir la de diez millonésimos

109/ 249 = 0.437751 0 04....
218/ 249 = 0.875502 0 08....
078/ 249 = 0.313253 0 12....
187/ 249 = 0.751004 0 16....
047/ 249 = 0.188755 0 2.....
156/ 249 = 0.626506 0 24....
016/ 249 = 0.064257 0 28....
125/ 249 = 0.502008 0 32....
234/ 249 = 0.939759 0 36....
094/ 249 = 0.377510 0 4.....
203/ 249 = 0.815261 0 44....
063/ 249 = 0.253012 0 48....
172/ 249 = 0.690763 0 52....
032/ 249 = 0.128514 0 56....
141/ 249 = 0.566265 0 6.....
001/ 249 = 0.004016 0 64....
110/ 249 = 0.441767 0 68....
219/ 249 = 0.879518 0 72....
079/ 249 = 0.317269 0 76....
188/ 249 = 0.755020 0 8.....
048/ 249 = 0.192771 0 84....
157/ 249 = 0.630522 0 88....
017/ 249 = 0.068273 0 92....
126/ 249 = 0.506024 0 96....
235/ 249 = 0.943775 1 00....
095/ 249 = 0.381526 1 04....
204/ 249 = 0.819277 1 08....

SEGUNDA APLICACION

Hallar el residuo que contiene el tercer cero en la columna de decimales de posición 32 generado por las divisiones de los residuos del divisor 2569.

SOLUCION .-
Hallemos la base b que domina el desplazamiento de las cifras que generan el o los periodos patrones de 2569, b = (2569 +1) / 10 = 257.

Hallemos el residuo que genera los múltiplos del desplazamiento, para ubicar las cifras que se necesitan para escribir el o los períodos patrones de 2569.

La cantidad de cifras del sistema de numeración decimal que se necesitan para escribir el o los periodos patrones de 2569 son :

$2\,569 = 10 \times (\mathbf{256}) + 9$ **k = 256** entonces en ó los periodos patrones de 2569 se utilizan 256 cifras 0 y 9 de c/u.
y 257 cifras 1, 2 , 3, 4, 5, 6, 7, 8 de c/u

Hallando el residuo **r** que domina el desplazamiento de las cifras del sistema decimal tenemos :

$$257^{32-1} = 257^{31} = \text{mod } 2569 + r$$
$$(257^{2})^{15} \times 257 = (66049^{15}) \times 257 = \text{mod } 2569 + r$$

Por el binomio de Newton vamos obteniendo los resultados siguientes :

$$(\text{mod } 2569 + 1824)^{15} \times 257 = (\text{mod } 2569 + 1824^{15}) \times 257$$

$$(\text{mod } 2569 + (1824^{2})^{7} \times 1824) \times 257$$

$$(\text{mod } 2569 + 3\,326\,976^{7} \times 1824) \times 257$$

$$(\text{mod } 2569 + (\text{mod } 2569 + 121)^{7} \times 1824) \times 257$$

$$(\text{mod } 2569 + (\text{mod } 2569 + 121^{7}) \times 1824) \times 257$$

$$(\text{mod } 2569 + (\text{mod } 2569 + (121^{3})^{2} \times 121) \times 1824) \times 257$$

$$(\text{mod } 2569 + \text{mod } 2569 + 1\,771\,561^{2} \times 121 \times 1824) \times 257$$

$$(\text{mod } 2569 + (\text{mod } 2569 + 1520)^{2} \times 220\,704) \times 257$$

$$(\text{mod } 2569 + (\text{mod } 2569 + 2\,310\,400) \times (\text{mod } 2569 + 2339)) \times 257$$

$$(\text{mod } 2569 + (\text{mod } 2569 + 869) \times (\text{mod } 2569 + 2339)) \times 257$$

$$(\text{mod } 2569 + (\text{mod } 2569 + 2\,032\,591)) \times 257$$

$$(\text{mod } 2569 + 512) \times 257$$

$$\text{mod } 2569 + 131\,584 = \text{mod } 2569 + 565$$

Por lo tanto **r = 565**

El residuo 565 nos indica el avance de las cifras, dándonos los múltiplos de los residuos respecto al módulo 2569 donde se irán ubicando dichas cifras.

El primer cero aparece en la posición 32 en la división de 565 / 2569

El segundo cero aparece en la posición 32 en la división de (565 + 565)/2569

El tercer cero aparece en la posición 32 en la división de (1130 + 565)/ 2569

Es decir en 1695 / 2569 aparece el tercer cero en la posición 32, esta es la respuesta al problema, esto se puede verificar aplicando el método del eslabón.

TEMA DE INVESTIGACION

Encontrar la demostración para este método.
Con lo explicado y los ejemplos expuestos el lector enunciará las reglas prácticas que se necesitan para trabajar con este método de división no convencional.
Observar que sucede en otros sistemas de numeración.
Llevar a un lenguaje de programación este método.
Por conversaciones con el Ing. Juan Guzmán D. este me indicó que es posible diseñar un circuito electrónico con este método para dividir en una calculadora, pues no se esta utilizando en la actualidad toda la potencia de los diseños electrónicos.

CAPITULO VI

TEMA DE ANALISIS CON RESPECTO AL USO DE LOS SIMBOLOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS E HIPERBOLICAS

Este capítulo lo dedicó a un tema que puede ahorrar el uso de caracteres de los símbolos de las F.T. trigonométricas

tenemos las F.T. : senA, cosA , tag A, ctgA, secA, cscA

Hago la siguiente sugerencia para abreviar el uso de tantos caracteres y que tengan el mismo uso de reconocer las funciones trigonométricas :

senA = **snA**	tagA = **tgA**	secA = **scA**
cosA = **coA**	ctgA = **cgA**	cscA = **csA**

El tomar estos nuevos símbolos se ahorraría tiempo al escribirlos, sobre todo en capítulos como el de identidades trigonométricas.
Este mismo criterio se puede aplicar a las funciones hiperbólicas, basta agregar h a las nuevas abreviaturas .

Dirigir las opiniones a la dirección que aparece al final del libro.

AMPLIACION DE LA CONJETURA VI. DEL LIBRO INVESTIGACION MATEMATICA

Una observación importante del Ing. Felix Maldonado es que si se conocen las cifras que intervienen en los periodos patrones de un número primo o compuesto se puede conocer la suma de las cifras de el o los periodos patrones.

AMPLIACION DE LA CONJETURA VII. DEL LIBRO INVESTIGACION MATEMATICA

En ese capítulo vemos que la suma de extremos es aproximadamente la suma de medios en una tabla de numeros primos de 10 columnas (podríamos llamarlo así para su mejor comprensión), pero luego de un tiempo he comprobado que tambien se verifica el producto de extremos es aproximadamente el de medios, debido a una observación del Ing . Juan Guzmán Delgado.

BIBLIOGRAFIA

(1) La lectura y dibujos sobre la serie de Fibonacci ha sido extraido del LIBRO DEL AÑO BARSA 1978 EDITADO por ALPHA EDITORES Y ASESORES, SA DE CV

El trabajo sobre el Algoritmo de Euclides y la serie de Fibonacci es obra del autor.

AUTORES PERUANOS
Sería innumerable la lista de autores peruanos de libros de matemática y ciencias afines a los cuales mencionar, los que con mucho esfuerzo mantienen encendidas las llamas del conocimiento y la cultura para progreso de nuestro país, va desde estas páginas mi reconocimiento.

Ciertos periodicos con criterio en el Perú, publican tambien temas de verdadera importancia para el desarrollo cultural y espiritual de sus lectores.

En esta lista voy a consignar solamente aquellas revistas o libros peruanos que durante estos años han publicado temas de divulgación científica, si no menciono alguna obra es por que no he tenido conocimiento de ella y esto se debe a que este tipo de obras especializadas no tienen la difusión adecuada.

REVISTA MATEMATICA Nos. DEL 1 AL 5	Ing. Arturo Isla Zevallos
PERIODICO MATHESIS	Ing. Arturo Isla Zevallos
BOLETIN SIGMA Años 1967 a 1972 y 1984 y 1985	Ing. Efraín Rodríguez Cárdenas Academia Matemática SIGMA
CIENCIA NUEVA Nos. 1 y 2	Publicación de la Facultad de Ciencias de la UNI y Universidad Particular Cayetano Heredia
ARISMETICA PERUANA COMPUESTO POR EL PADRE DIEGO DE MORILLAS DE LA COMPAÑIA DE JESUS	Edición y transcripción paleográfica Anne Marie D.
SANTIAGO ANTUNEZ DE MAYOLO	Aúreo Sótelo Huerta Publicación de la Revista Visión Peruana
FEDERICO VILLARREAL	Arturo Alcalde Mongrut Publicación de la Revista Visión Peruana
PEDRO PAULET : PADRE DE LA ASTRONAUTICA	Megan Paulet Wilquet

PINACOTECA DE CIENTIFICOS Noviembre de 1990	Dr. Félix Escalante del Aguila Mr. Héctor Guimaray Huerta Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería
BOLETIN DE INVESTIGACION CIENTIFICA ESTUDIANTIL	Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería . 1984
EL HOMBRE QUE CALCULABA	Malba Tahan.
REVISTA MATEMATICA	Ediciones Culturales Cateto
PROMOCIENCIA	Periodico Educativo de Ciencias Walter Echevarría

AUTORES EXTRANJEROS

REVISTA DE MATEMATICAS ELEMENTALES	Facultad de Ciencias de la Universidad de Colombia
REVISTA MATEMATICA	Sociedad Matemática Mexicana
PARADOJAS MATEMATICAS	Northrop
MATEMATICAS PARA EL PRIMER CICLO SECUNDARIO	Grupo de estudio de la Matemática Escolar. Fundación Nacional de Ciencias USA
MATEMATICAS RAPIDAS	Edward H. Julius

SERIE « LECCIONES POPULARES DE MATEMATICAS » Editorial Mir

METODO DE INDUCCION MATEMATICA	I. S. Sominski
CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD	N. N. Vorobiov
DIVISION INEXACTA	A. A. Belski L. A. Kaluzhnin
ACERCA DE LA DEMOSTRACION EN GEOMETRIA	A. I. Fetísov
INDUCCION EN LA GEOMETRIA	L. I. Goloviná I. M. Yaglom

ACERCA DE LA GEOMETRIA DE LOBACHEVSKI	A. S. Smogorzhevski
LOS ALGORITMOS Y LA RESOLUCION AUTOMATICA DE PROBLEMAS	B. A. Trajtenbrot

A continuación los libros y revistas son de diversos temas de ciencias

FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE NUMEROS	I. Vinogradov
BUENO ? Y QUE ?	Y. Jurguin
ALGEBRA RECREATIVA	Y. Perelman

Es importante mencionar a dos escritores de temas de divulgación científica : Isaac Asimov y Martin Gardner.

HOJA DE SUSCRIPICION A LA REVISTA INVESTIGACION MATEMATICA

Si desea suscribirse a la revista, llenar la siguiente hoja de datos :

Nombre o Razón Social : ----------

Dirección : ----------

Número de RUC (para la emisión de facturas) : .....

TEL. : ....

FAX : ....

E- MAIL : .....

Si tiene algún artículo o tema de interés que desee se publique, agradeceremos nos lo envie a la Av. Arica 178 San Miguel Lima , tambien puede llamarnos al 263 6517 ó al 263 3393 FAX : 271 5424.

Tambien puede enviarnos su e-mail a : dass@peruintinet.com.pe

Las sugerencias sobre el contenido o temas que desee sean publicados :

Deseo suscribirme a la revista INVESTIGACION MATEMATICA

Número 1 (fecha de publicación 05 de agosto)
Número 2 (fecha de publicación 10 de setiembre)
Número 3 (fecha de publicación 17 de noviembre)

Costo de la suscripción (Indicar con una x)

Por el número 1	US$ 5.00	.....
Por 2 números (a elección del suscriptor)	US$ 8.00	.....
Por 3 números (Nos. 1, 2 ,3)	US$ 13.00	.....

No incluye el IGV

La entrega es a domicilio, para provincias indicar la empresa de transportes o el medio para que el material llegue en buen estado y sin ningún contratiempo.

Para los suscriptores de provincias pueden hacer su depósito en la cuenta corriente Banco de Crédito (moneda extranjera) No. 193 - 09721081 - 1 -72, incluyendo la mitad del pago del transporte terrestre elegido, en caso de ser envío aereo incluir el 80% del pago.
En los dos casos la diferencia del pago del transporte lo asumimos.

* Después de efectuar el depósito, faxear o enviar por correo una copia de la boleta de depósito para hacerle llegar los números solicitados.

AVISOS PUBLICITARIOS

Si usted desea insertar publicidad en los próximos números de la revista INVESTIGACION MATEMATICA , las opciones para el tamaño de los avisos es la siguiente :

Contratapa superior página completa

Contratapa inferior 1/2 página

Avisos interiores 1/2 y 1/4 de pagina

Avisos páginas finales 1/4 , 1/8 y 1/16 de pagina

Enviar esta hoja (o una fotocopia) a :

Miguel Guzmán Delgado
Av. Arica 178 San Miguel
T : 263 6517 263 3393
F : 271 5424